Laboratório de Pesquisa em Redes e Multimídia

Aritmética Binária e Complemento a Base

Bernardo Nunes Gonçalves

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Informática

Sumário

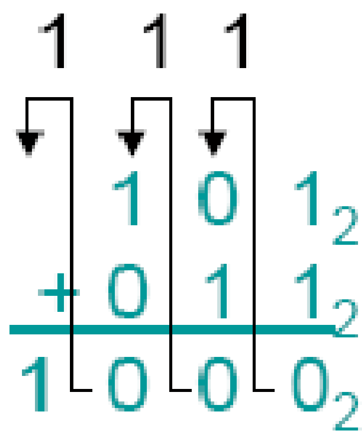
- Soma e multiplicação binária
- Subtração e divisão binária
- Representação com sinal
  - Sinal e magnitude
  - Complemento a base.

Adição binária

- Regras:
  - 0 + 0 = 0
  - 0 + 1 = 1
  - 1 + 0 = 1
  - 1 + 1 = 0 (e "vai 1" para o dígito de ordem superior)
  - 1 + 1 + 1 = 1 (e "vai 1" para o dígito de ordem superior)

Adição binária

- Ex: 101 + 011



Multiplicação binária

- Regras:
  - 0 x 0 = 0
  - 0 x 1 = 0
  - 1 x 0 = 0
  - 1 x 1 = 1

- Mesmo método que o decimal: deslocamentos e adições.
- Número maior deve ser colocado acima do menor.

Multiplicação binária

- Ex: 101 x 011

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & & & 1 & 0 & 1_2 \\
 & & & \times & 0 & 1 & 1_2 \\
\hline
 & & & & 1 & 0 & 1 \\
 & & & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & & \\
\hline
\text{Produto} \longrightarrow & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Subtração binária

- Regras:
  - 0 - 0 = 0
  - 0 - 1 = 1 (e "pede emprestado 1" para o dígito de ordem superior)
  - 1 - 0 = 1
  - 1 - 1 = 0

Subtração binária

- Ex: 101 - 011

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1_2 \\ - & 0 & 1 & 1_2 \\ \hline & 0 & 1 & 0_2 \end{array}$$

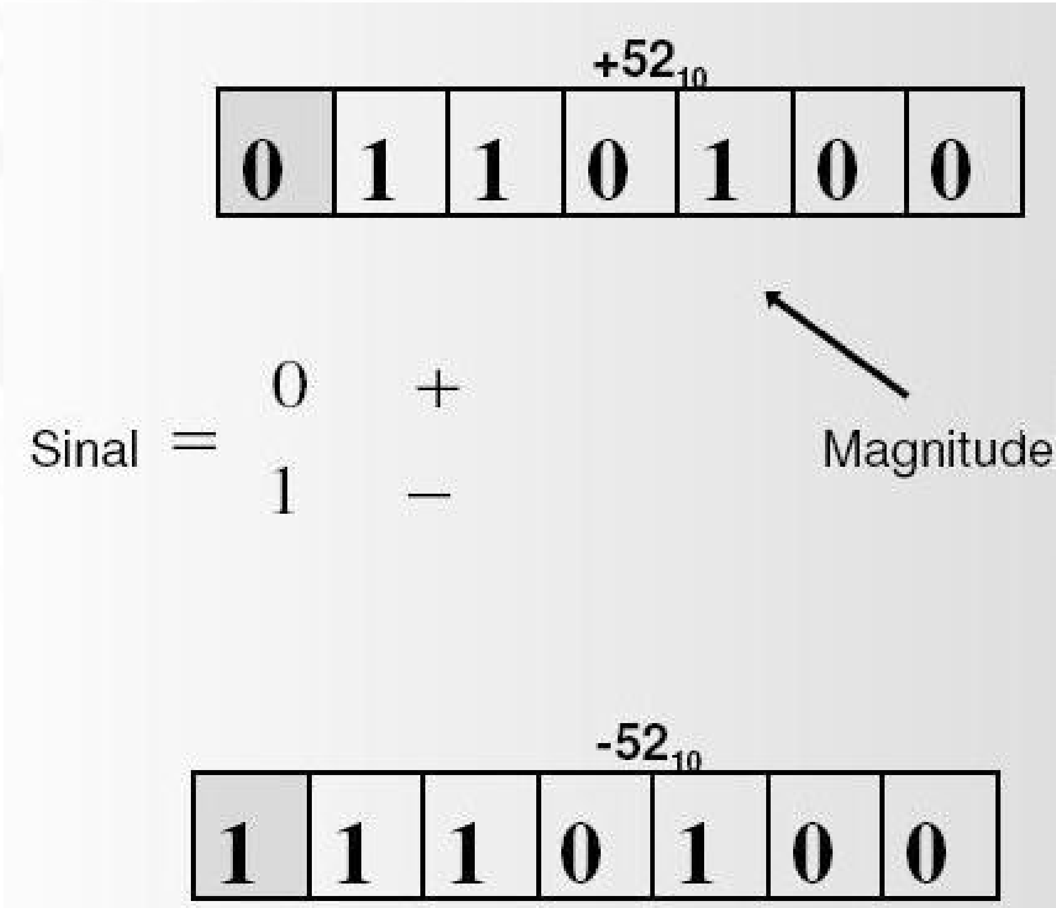
Divisão binária

- Mesmo método que o decimal: deslocamentos e subtrações.
- Ex:

```
101010   | 110
         -------
-110       111
 1001
  -110
   0110
     110
     000
```

Representação de números com sinal

Sistema sinal-magnitude



Sistema sinal-magnitude

- Algoritmo de soma (números com sinal):
  - Sinais diferentes
    - Encontra número com maior magnitude
    - Subtrai menor do maior
    - Atribui ao resultado o sinal do número de maior magnitude
  - Sinais iguais
    - Soma e atribui sinal dos operandos
    - Atenção deve ser dada ao estouro de magnitude
    - Algoritmo de soma (números com sinal)

Questões de projeto de circuitos lógicos

- Algoritmo do sistema sinal-magnitude: lógica complexa por conta das diversas condições (requer vários testes) leva a aritmética complicada em termos de hardware.
- Também a multiplicação em computadores é feita por um artifício: para multiplicar um número A por n, basta somar A com A, n vezes. Por exemplo, 4 x 3 = 4 + 4 + 4.
- E a divisão também pode ser feita por subtrações sucessivas.

Complemento a Base

- Em computadores a subtração em binário é feita por um artifício: o **"Método do Complemento a Base"**.
- Consiste em encontrar o complemento do número em relação a base e depois somar os números.
- Os computadores funcionam sempre na base 2, portanto o complemento a base será complemento a dois.

Representação de números em complemento

- Complemento é a diferença entre o maior algarismo possível na base e cada algarismo do número.
- Através da representação em complemento a subtração entre dois números pode ser substituída pela sua soma em complemento.

Representação de números positivos em complemento

- A representação de números positivos em complemento é idêntica à representação em sinal e magnitude.

Representação de números negativos em complemento a (base -1)

- A representação dos números inteiros negativos é obtida efetuando-se: (base - 1) menos cada algarismo do número. Fica mais fácil entender através de exemplos…

Representação de números negativos em complemento a (base -1)

- Ex 1: Calcular o complemento a (base - 1) do número 297_{10}
- Se a base é 10, então 10 - 1 = 9 e o complemento a (base -1) será complemento a 9.

Ex.1

(base -1) ---> 999
- 297
Complemento ---> 702

Representação de números negativos em complemento a (base -1)

- Ex 2: Calcular o complemento a (base - 1) do número $3A7E_{16}$

- Se a base é 16, então 16 - 1 = 15 = F e o complemento a (base -1) será complemento a F.

	Ex.2
(base -1) --->	FFFF
	- 3A7E
Complemento --->	C581

Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1

- Para se obter o complemento a 1 de um número binário, devemos subtrair cada algarismo de 1.
- Uma particularidade dos números binários é que, para efetuar esta operação, basta **inverter todos os bits**.

Representação de números negativos em complemento a (base - 1)

- Ex: Calcular o complemento a (base - 1) do número 0011_2 (estamos usando 4 dígitos).

- Se a base é 2, então 2 - 1 = 1 e o complemento a (base -1) será complemento a 1 (C1).

$$
\begin{array}{r}
1111 \\
-\ \underline{0011} \\
1100\ (C1)
\end{array}
$$

Espaço de representação

- Quantas grandezas (inteiras) diferentes podemos representar usando (n) posições em um sistema de base (b)?

_	_	_	_	...	_	_	_	_
n	**n-1**	**n-2**	**n-3**		**3**	**2**	**1**	**0**

- Resposta: b^n (do zero a $b^n - 1$)

Espaço de representação

- Exemplos na base 2; quantos números conseguimos representar com…

- Com até um dígito: 0, 1 -> 2^1 números

- Com até dois dígitos: 00, 01, 10, 11 -> 2^2 números

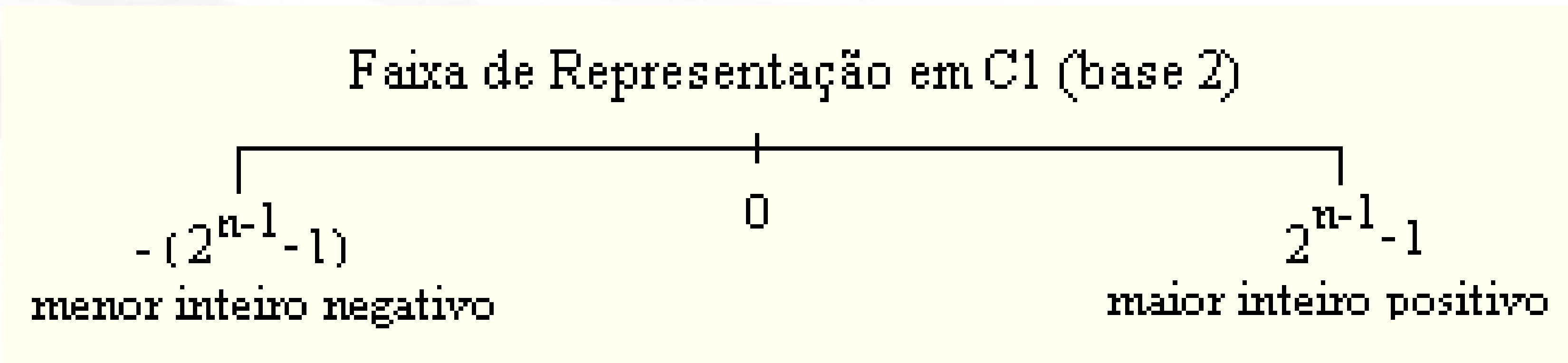
- Com até três dígitos: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 -> 2^3 números

Representação em C1 dos números binários de 4 dígitos

Decimal (positivo)	Binário (se o número é positivo, não há alteração)	Decimal (negativo)	Binário (em C1)
0	0000	0	1111
1	0001	-1	1110
2	0010	-2	1101
3	0011	-3	1100
4	0100	-4	1011
5	0101	-5	1010
6	0110	-6	1001
7	0111	-7	1000

- Repare como o espaço de representação da base 2 com 4 dígitos está sendo usado na representação em C1 (note que há 2 representações para o zero).

Representação em C1 dos números binários de 4 dígitos



Base 10 com 3 dígitos

- A representação varia de 000 a 999 (10^3 representações), representando os números de -499 a -1 (faixa negativa), de +1 a +499 (faixa positiva);

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C 9	1 2.... 498 499	500 501 ..... 997 998
Número representado	1 2 .... 498 499	-499 -498 ..... -2 -1

- O zero pode ser representado tanto por 000 quanto por 999.

Aritmética em complemento a (base -1)

- Na aritmética em complemento a (base - 1), basta somar os números, sendo que um número negativo será representado por seu complemento a (base – 1).

Aritmética em complemento a (base -1)

- Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Complemento a (base-1)	Verificação
- 418	581 (C9)	999
+ 123	+ 123	- 295
- 295	704	704

Aritmética em complemento a (base -1)

- Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Complemento a (base-1)	Verificação
- 418	581 (C9)	999
+ 123	+ 123	- 295
- 295	704	704

- Verificamos que o resultado 704 (C9) é um número negativo, isto é, o complemento a 9 (base 10 -1) de 295.

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C9	1 2.... 498 499	500 501 ..... 997 998
Número representado	1 2 .... 498 499	-499 -498 ..... -2 -1

Aritmética em complemento

- Repare que a subtração (ou soma de um número positivo com um número negativo) se transforma, nesta representação, em uma **soma em complemento**, isto é, a soma dos complementos do número positivo com o número negativo.
- Portanto, uma subtração pode ser realizada simplesmente através da soma dos números "complementados".
- Se o número é positivo, mantenha-o; se o número é negativo, complemente-o; e aí, é só somar.

Aritmética em complemento

- Dessa forma, podemos constatar que o algoritmo da soma em complemento é muito mais simples que o da soma em sinal e magnitude, uma vez que **não requer nenhum teste**.
- No entanto, continuamos com duas representações para o zero. Vamos a seguir discutir a solução para esse problema.

Representação de números negativos em complemento a base

- A representação dos números inteiros negativos em **complemento a base** é obtida subtraindo-se da base cada algarismo do número. Por ex., base 10 com 3 dígitos: 1000 - x
- Ora, seria a mesma coisa subtrair cada algarismo de (base - 1), isto é, calcular o complemento a (base -1) e depois somar 1 ao resultado.
- Ou seja, encontramos o complemento a (base - 1) do número (o que facilita muito no caso dos números binários) e depois somamos 1 ao resultado. Fica mais fácil entender através de exemplos…

Complemento a base

- Ex 1: calcular o complemento a base do número 297_{10}
- Queremos então calcular o complemento a 10 (C10) desse número.

Ex.1	Ex.1 (alternativa)
1000	999
- 297	- 297
703	702
	+ 001
	703

- Note que o método alternativo é mais eficiente.

Complemento a base

- Ex 2: calcular o complemento a base do número $3A7E_{16}$
- Queremos então calcular o complemento a 16 (C16) desse número.

<u>Ex.2</u>

$$
\begin{array}{r}
FFFF \\
-\ \underline{3A7E} \\
C581 \\
+\ \underline{0001} \\
C582
\end{array}
$$

Caso particular: base 2 (complemento a 2)

- Subtrair cada algarismo de 1 (complemento a 1) e depois somar 1 ao resultado.
- Assim, conforme mencionado anteriormente, para obter o C1 de um número binário, basta **inverter todos os bits**.
- E para obter o C2 de um número obtemos primeiro o C1 (invertendo os bits) e depois somamos 1 ao resultado.

Caso particular: base 2 (complemento a 2)

- Ex: calcular o complemento a 2 (C2) de um número binário 0011 com 4 dígitos:

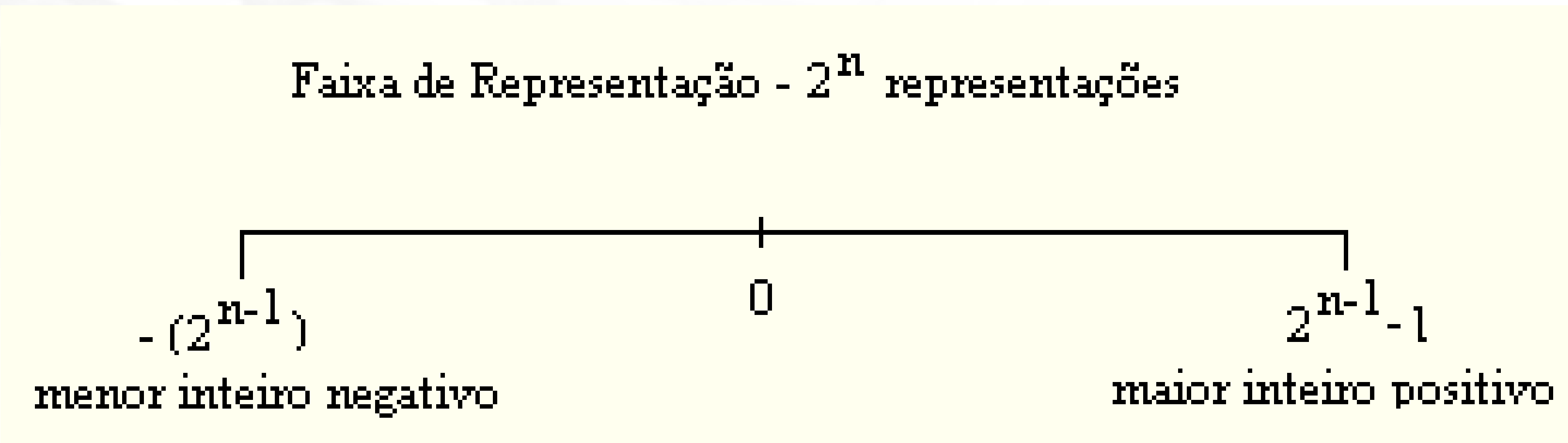
$$
\begin{array}{rl}
 & 1111 \\
- & \underline{0011} \\
 & 1100 \text{ (C1)} \\
+ & \underline{0001} \\
 & 1101 \text{ (C2)}
\end{array}
$$

Representação em C2 dos números binários de 4 dígitos

Decimal (positivo)	Binário (se o número é positivo, não há alteração)	Decimal (negativo)	Binário (C2)
0	0000	-1	1111
1	0001	-2	1110
2	0010	-3	1101
3	0011	-4	1100
4	0100	-5	1011
5	0101	-6	1010
6	0110	-7	1001
7	0111	-8	1000

- Vemos assim que em C2, não há duas representações para o valor 0 e conseqüentemente abriu-se lugar para mais uma representação. No caso, mais um número negativo pode ser representado.

Representação em C2 dos números binários de 4 dígitos



Aritmética em complemento a base

- Na aritmética em complemento a base, basta somar os números, sendo que um número negativo será representado por seu complemento a base.

Aritmética em complemento a base

- Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Cálculo C10	C10	Verificação
- 418	999	582	999
+ 123	- 418	+ 123	- 295
- 295	581 (C9)	705 (C10)	704
	+ 001		+ 001
	582 (C10)		705

Aritmética em complemento a base

- Ex.: Somar + 123 com - 418 (decimal).

Sinal e magnitude	Cálculo C10	C10	Verificação
- 418	999	582	999
+ 123	- 418	+ 123	- 295
- 295	581 (C9)	705 (C10)	704
	+ 001		+ 001
	582 (C10)		705

- Verificamos que o resultado 705 (C10) é um número negativo, isto é, o complemento a 10 (base 10) de 295.

Base 10	Faixa Inferior (positiva)	Faixa Superior (negativa)
C10	1 2 499	500 501 999
Número representado	1 2 499	-500 -499 ... -1

Aritmética em Complemento a 2

Aritmética em Complemento a 2

- A adição de dois números nesse sistema de representação segue duas regras:
  - Some os dois números e observe se ocorre o *carry* (vai 1) **sobre** o bit de sinal e se ocorre o *carry* **após** o bit de sinal.
  - Se ocorrer **um e somente um** dos dois *carry*, então **houve estouro**; caso contrário o resultado da soma está dentro do campo de definição.

  Obs: A subtração em complemento de 2 é realizada através da soma de n°s negativos.

Aritmética em Complemento a 2

- Exemplos para *n* = 4 bits

0 1 0 1	5	*Carry* sobre o bit de sinal
0 1 1 0	6	-> **estouro = overflow**
+ ______	__	
1 0 1 1	11	

0 1 0 1	5	
0 0 1 0	2	Não houve *Carry* = **não overflow**
+ ______	__	
0 1 1 1	7	

Aritmética em Complemento a 2

0 1 0 1 + 1 0 1 0 1 1 1 1	5 - 6 - 1	Não houve *Carry* = **não overflow**
0 1 1 0 + 1 0 1 1 0 0 0 1	6 - 5 1	*Carry* sobre o "bit de sinal" e após ele = **não overflow**
1 0 1 1 + 1 0 1 0 0 1 0 1	- 5 - 6 - 1 1	*Carry* somente após o "bit de sinal" = **overflow**

Complemento a dois: adição

- Ex: $5_{10} + 3_{10} = 8_{10}$ (utilização de 4 bits)

$$
\begin{array}{r}
0\ 1\ 0\ 1_2 \\
+0\ 0\ 1\ 1_2 \\
\hline
1\ 0\ 0\ 0_2
\end{array}
$$

- Notar: quando o bit mais significativo for 1, trata-se de um número negativo. No caso desse exemplo seria necessário mais um bit para representar 8_{10} usando a representação binária em complemento de dois.

Representação em C2 dos números binários de 4 dígitos

Decimal (positivo)	Binário (se o número é positivo, não há alteração)	Decimal (negativo)	Binário (C2)
0	0000	-1	1111
1	0001	-2	1110
2	0010	-3	1101
3	0011	-4	1100
4	0100	-5	1011
5	0101	-6	1010
6	0110	-7	1001
7	0111	-8	1000

Complemento de dois: estouro de magnitude

- Em qualquer sistema de complemento de dois, existe sempre um limite para o tamanho dos números a serem representados.
- Exemplo: quando usamos complemento de dois com padrões de quatro bits (um para o sinal), ao valor 9 não está associado padrão algum; por isso não conseguimos obter uma resposta certa para a soma 5 + 4, o resultado apareceria como -7.

Adição em complemento de dois

- Ex: $5_{10} + 3_{10} = 8_{10}$ (utilização de 4 bits)

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ +0\ 0\ 1\ 1_2 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0_2 \end{array}$$

Com o acréscimo de um bit seria possível

$$0\ 1\ 0\ 0\ 0_2$$

- Utilizando-se 4 bits, o número 1000 em C2 é o -8_{10} , e não o 8_{10}

Complemento de dois: subtração

- Somar usando representação em C2:
- Ex: 5 - 3 = 2 (utilização de 4 bits)

$$3_{10} = 0\ 0\ 1\ 1_2$$
$$-3_{10} = 1\ 1\ 0\ 1_2$$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline (1)\ 0\ 0\ 1\ 0_2 \end{array}$$

Subtração em complemento de dois

- Somar usando representação em C2:
- Ex: 5 - 3 = 2 (utilização de 4 bits)

$$3_{10} = 0\ 0\ 1\ 1_2$$
$$-3_{10} = 1\ 1\ 0\ 1_2$$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline (1)\ 0\ 0\ 1\ 0_2 \end{array}$$

- Notar: o bit mais significativo (decorrente do último “vai-um”) deve ser desprezado.

Aritmética em complemento a 2: exemplos

Problema na base de dez	Problema em complemento de dois	Resposta na base de dez
3 + 2	0011 + 0010 = 0101	5
-3 + -2	1101 + 1110 = 1011	-5
7 + -5	0111 + 1011 = 0010	2

A vantagem da notação de complemento de dois é que a adição qualquer combinação de números, positivos e negativos, podem ser efetuadas usando o mesmo algoritmo, portanto o mesmo circuito.

7	0111	0111
+ -5	- 0101	+ 1011
		0010 = 2

Conclusões

- O que concluímos? Que qualquer operação aritmética pode ser realizada em computadores apenas através de somas (diretas ou em complemento)!
- Legal, mas para que serve isso? Por enquanto, ficamos por aqui. Em circuitos lógicos veremos como essas propriedades serão úteis para os engenheiros que projetam os computadores.