

LP-II
PROVA 0.1
THE DARK SIDE OF THE MOON

RAUL H.C.LOPES

1. INTRODUÇÃO

Esta é de verdade: a **Prova 0!** Ela foi concebida para ser resolvida em 100 minutos. Ela deve ser resolvida individualmente, sendo permitidas consultas a livros e notas de aula. Não é permitida a troca de qualquer tipo de material entre colegas.

2. PROVAS E REGRAS

A prova contém exercícios de construção e correção de algoritmos recursivos. Algoritmos só serão considerados válidos se apresentados com sua prova de correção: sem provas de correção, eles não passam de hipóteses mal formuladas, que o **Senhor do Castelo** nem lê.

Uma prova de correção só será considerada válida se cada um de seus passos (repito, cada um de seus passos) for claramente justificado por:

- um axioma ou regra de inferência da lógica;
- um teorema ou lema previamente provado e apresentado nesta prova.

Todas as suas definições e provas serão, em princípio, apresentadas em lógica de primeira ordem, usando *equational reasoning*, como feito em sala de aula. Você é livre para usar outra lógica e/ou formalismo de prova desde que devidamente justificado: ou seja, anuncie claramente o formalismo que usará e identifique explicitamente cada regra de inferência usada nas provas. Por exemplo, definições em Haskell, deverão ser acompanhadas por axiomas definindo a semântica dos operadores da linguagem usados.

A notação de pontos de Curry, apresentada em sala e notas de aula e página 34 de [1], é utilizada para reduzir o uso de parênteses.

3. SEQUÊNCIAS

Uma sequência de elementos de um tipo A é uma sequência vazia (denotada por $\perp$) ou resultado de adicionar um elemento de A a uma

seqüência de elementos de A . Os axiomas a seguir definem seqüências de elementos de A , denotada $seq.A$:

- (1) $\perp \in seq.A$
- (2) $(a \triangleleft x) \in seq.A \Leftrightarrow x \in seq.A \wedge a \in A$
- (3) fecho universal.

Assumindo que $x, y \in seq.A$ e que $a, b \in A$, os seguintes axiomas tratam a igualdade sobre seqüências.

- (4) $\perp \neq (a \triangleleft x)$
- (5) $(a \triangleleft x) = (b \triangleleft y) .\equiv. a = b \wedge x = y$

O princípio da indução sobre seqüências estabelece que se P é propriedade sobre seqüências:

$$(\forall x : x \in seq.A : P.x) = (P(\perp) \wedge (\forall x : x \in seq.A : \forall a : a \in A : P.x \Rightarrow P.a \triangleleft x))$$

As equações a seguir definem o operador *snoc* (denotado $\triangleright$, em oposição, logicamente ao operador *cons*, $\triangleleft$).

- $\perp \triangleright a .\equiv. a \triangleleft \perp$
- $(a \triangleleft x) \triangleright b .\equiv. a \triangleleft (x \triangleright b)$

As equações a seguir definem um operador *cat* (denotado $\hat{\sim}$) para concatenar duas seqüências.

- $\perp \hat{\sim} y = y$
- $(a \triangleleft x) \hat{\sim} y = .a \triangleleft (x \hat{\sim} y)$

Pertinência em uma seqüência é definida a seguir.

- $a \notin \perp$
- $a \in (b \triangleleft x) .\equiv. a = b \vee a \in x$

4. AS QUESTÕES DA PARTE 1

Questão 1. Considere a seguinte definição cálculo de reverso de uma seqüência:

- (6) $rev.\perp = \perp$
- (7) $rev.c \triangleleft x = ((rev.x) \triangleright c)$

Defina uma propriedade $P.x$ sobre seqüências tal que

$$\forall x : x \in seq.A : P.x = (rev.x = x)$$

Prove.

Questão 2. Defina uma relação de subsequência tal que x é uma subsequência de y , denotado $x \subseteq y$, quando x é obtido de y retirando-se alguns elementos (não necessariamente consecutivos) de y e preservando-se a ordem dos que restam.

$$2 \triangleleft 4 \triangleleft 3 \triangleleft \perp \subseteq 1 \triangleleft 0 \triangleleft 2 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 3 \triangleleft 2 \triangleleft \perp$$

$$(1 \triangleleft \perp) \subseteq (1 \triangleleft \perp)$$

Prove que $(x \subseteq y) \wedge (y \subseteq z) \Rightarrow (x \subseteq z)$

Questão 3. Considere a seguinte definição.

$$(8) \quad \text{sort}.\perp = \perp$$

$$(9) \quad \text{sort}.a \triangleleft x = (\text{sort}.\text{lsplit}(a, x))^{\wedge} (a \triangleleft \text{sort}.\text{rsplit}(a, x))$$

Defina o operador $\nearrow$ tal que $(x) \nearrow$ quando x é não decrescente.

Defina lsplit e rsplit tal que

$$(\text{sort}.x) \nearrow$$

Prove.

Questão 4. Uma seqüência x é uma permutação de uma seqüência y quando x é seqüência que contém exatamente os mesmos elementos que y , possivelmente em uma ordem diferente.

Em relação às definições da questão 3, prove que $\text{sort}.x$ é uma permutação de x .

5. TIME

...kickin' away the moments that make up a dull day

REFERÊNCIAS

- [1] Haskell B. Curry, *Foundations of mathematical logic*, Dover Publications, Inc., 1977.