LP-II
PROVA 0.0

RAUL H.C.LOPES

1. Provas e regras

São apresentadas aqui as soluções da parte zero da prova zero: **Prova 0.0**. Note que os exercícios apresentados usam fundamentalmente lógica de primeira ordem, indução matemática e o conceito de seqüências, que, aliás, são os conceitos introdutórios de todos os livros de teoria da computação presentes na biblioteca da UFES, veja, por exemplo, partes 4 e 5 do primeiro capítulo de [1].

2. Seqüências

Uma seqüência de elementos de um tipo A é uma seqüência vazia (denotada por $\perp$) ou o resultado de adicionar um elemento de A a uma seqüência de elementos de A. Os axiomas a seguir definem seqüências de elementos de A, denotada $seq.A$:

(1) $\quad \perp \in seq.A$

(2) $\quad (a \lhd x) \in seq.A \Leftarrow x \in seq.A \wedge a \in A$

(3) $\quad$ fecho universal.

Assumindo que $x, y \in seq.A$ e que $a, b \in A$, os seguintes axiomas tratam a igualdade sobre seqüências.

(4) $\quad \perp \neq (a \lhd x)$

(5) $\quad (a \lhd x) = (b \lhd y) \;.{=}.\; a = b \wedge x = y$

O princípio da indução sobre seqüências estabelece que se P é propriedade sobre seqüências:

$$\begin{aligned}&(\forall x : x \in seq.A : P.x) = \\ &\qquad P(\perp) \\ &\qquad \wedge(\forall x : x \in seq.A : \forall a : a \in A : P.x \Rightarrow P.a \lhd x)\end{aligned}$$

As equações a seguir definem o operador *snoc* (denotado $\rhd$, em oposição, logicamente ao operador *cons*, $\lhd$).

- $\perp \rhd a \;.{=}.\; a \lhd \perp$

- $(a \triangleleft x) \triangleright b \mathrel{.=.} a \triangleleft (x \triangleright b)$

As equações a seguir definem um operador *cat* (denotado $\hat{}$) para concatenar duas seqüências.

- $\perp \hat{} y = y$
- $(a \triangleleft x) \hat{} y = .a \triangleleft (x \hat{} y)$

Pertinência em uma seqüência é definida a seguir.

- $a \notin \perp$
- $a \in (b \triangleleft x) =. \; a = b \vee a \in x$

A definição de inserção ordenada em uma seqüência segue. Assume-se que o tipo A é totalmente ordenado com os operadores $<$ e $\leq$ tendo o seu significado usual.

- $a \rightsquigarrow \perp = (a \triangleleft \perp)$
- $a \leq b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) =. \; a \triangleleft (b \triangleleft x))$
- $a > b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) =. \; b \triangleleft (a \rightsquigarrow x))$

3. As questões da parte 0

Questão 1. *Defina um operador* **⁇** *para contar o número de ocorrências de um elemento em uma seqüência. Por exemplo,*

$$1 ⁇ (2 \triangleleft (1 \triangleleft (3 \triangleleft (1 \triangleleft \perp)))) = 2$$
$$a ⁇ (a \triangleleft (a \triangleleft (a \triangleleft \perp))) = 3$$

Prove que

$$a = c \Rightarrow (a ⁇ (a \rightsquigarrow x) = 1 + (a ⁇ x)) \tag{6}$$
$$a \neq c \Rightarrow (a ⁇ (c \rightsquigarrow x) = a ⁇ x) \tag{7}$$

Solução.

$$a ⁇ \perp = 0 \tag{8}$$
$$(a = b) \Rightarrow a ⁇ (b \triangleleft x) = 1 + a ⁇ x \tag{9}$$
$$(a \neq b) \Rightarrow a ⁇ (b \triangleleft x) = a ⁇ x \tag{10}$$

Prova de 6.

Prova.

Por indução:

$$R.x \triangleq \; a = c \Rightarrow (a ⁇ (a \rightsquigarrow x) = 1 + (a ⁇ x))$$

Prova de $R.\bot$, assumindo $a = c$.

$$
\begin{aligned}
& (a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow \bot) = 1 + (a\mathbf{??}\bot)) \\
=& \langle \textit{primeiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \triangleleft \bot) = 1 + (a\mathbf{??}\bot) \\
=& \langle \textit{primeiro axioma de } \mathbf{??} \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \triangleleft \bot) = 1 + 0 \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \mathbf{??} \rangle \\
& 1 + a\mathbf{??}\bot = 1 \\
=& \langle \textit{primeiro axioma de } \mathbf{??} \rangle \\
& 1 + 0 = 1 \\
=& \\
& 1 = 1 \\
=& \langle \textit{reflexividade de } = \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

Assumindo $R.x$ e $(a = c)$, a prova do consequente de $R.b \triangleleft x$ é apresentada considerando os casos: $a \leq b$ e $a > b$.

$$
\begin{aligned}
& a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow .b \triangleleft x) = 1 + (a\mathbf{??}\ b \triangleleft x) \\
\Leftarrow& \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow .b \triangleleft x) = 1 + (a\mathbf{??}\ b \triangleleft x) \wedge a \leq b \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \triangleleft .\ b \triangleleft x) = 1 + (a\mathbf{??}\ b \triangleleft x) \wedge a \leq b \\
=& \langle \textit{segundo axioma de } \mathbf{??} \rangle \\
& 1 + a\mathbf{??}\ b \triangleleft x = 1 + a\mathbf{??}\ b \triangleleft x \wedge a \leq b \\
=& \langle \textit{reflexividade de } = \textit{ e caso } a \leq b \rangle \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

Caso em que $a > b$

$$
\begin{aligned}
& a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow .b \triangleleft x) = 1 + (a\mathbf{??}\, b \triangleleft x) \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow .b \triangleleft x) = 1 + (a\mathbf{??}\, b \triangleleft x) \wedge b < a \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& a\mathbf{??}(b \triangleleft .\, a \rightsquigarrow x) = 1 + (a\mathbf{??}\, b \triangleleft x) \wedge b < a \\
= & \langle \textit{segundo axioma de } \mathbf{??} \rangle \\
& a\mathbf{??}(a \rightsquigarrow x) = 1 + (a\mathbf{??}x) \wedge b > a \\
= & \langle \textit{por } R.x \rangle \\
& 1 + (a\mathbf{??}x) = 1 + (a\mathbf{??}x) \wedge b > a \\
= & \langle \textit{reflexividade de } = \textit{ e caso } b > a \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

$\square$

Prove que

$$a \neq c \Rightarrow (a\mathbf{??}(c \rightsquigarrow x) = a\mathbf{??}x)$$

Prova.

Por indução: $R.x \stackrel{\triangle}{=} a \neq c \Rightarrow (a\mathbf{??}(c \rightsquigarrow x) = a\mathbf{??}x)$
Prova de que $R.\bot$, assumindo $a \neq c$.

$$
\begin{aligned}
& a\mathbf{??}(c \rightsquigarrow \bot) = a\mathbf{??}\bot \\
= & \langle \textit{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& a\mathbf{??}\bot = a\mathbf{??}\bot \\
= & \langle \textit{reflexividade de } = \rangle \\
& \mathit{true}
\end{aligned}
$$

Prova de $R.b \triangleleft x$, assumindo $a \neq c$.
A prova segue por casos. Primeiro, caso $c \leq b$.

$$
\begin{aligned}
& a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x) \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& (a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c \leq b \\
= & \langle \textit{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& (a⁇(c \triangleleft (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c \leq b \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } ⁇ \rangle \\
& (a⁇(b \triangleleft x) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c \leq b \\
& = \\
& \textit{true}
\end{aligned}
$$

Caso em que $c > b$, decomposta em dois casos: $a = b$ e $a \neq b$.

$$
\begin{aligned}
& a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x) \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& (a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c > b \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& (a⁇(b \triangleleft (c \rightsquigarrow x)) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c > b \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& (a⁇(b \triangleleft (c \rightsquigarrow x)) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c > b \wedge a = b \\
= & \langle \textit{segundo axioma de } ⁇ \rangle \\
& (1 + a⁇(c \rightsquigarrow x) = a⁇(b \triangleleft x)) \wedge c > b \wedge a = b \\
= & \langle \textit{pelo segundo axioma de } ⁇ \rangle \\
& (1 + a⁇(c \rightsquigarrow x) = 1 + a⁇x) \wedge c > b \wedge a = b \\
= & \langle \textit{por } R.x \rangle \\
& (1 + a⁇x = 1 + a⁇x) \wedge c > b \wedge a = b \\
= & \langle \textit{reflexividade de } = \textit{ e casos } c > b \wedge a = b \rangle \\
\textit{true} &
\end{aligned}
$$

Caso em que $c > b$ e $a \neq b$.

$$
\begin{aligned}
& a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x) \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& ((a⁇(c \rightsquigarrow (b \triangleleft x)) = a⁇(b \triangleleft x))) \wedge c > b \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
& ((a⁇(b \triangleleft (c \rightsquigarrow x)) = a⁇(b \triangleleft x))) \wedge c > b \\
\Leftarrow & \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
& ((a⁇(b \triangleleft (c \rightsquigarrow x)) = a⁇(b \triangleleft x))) \wedge c > b \wedge a \neq b \\
= & \langle \textit{terceiro axioma de } ⁇ \rangle \\
& (a⁇(c \rightsquigarrow x) = a⁇x) \wedge c > b \wedge a \neq b \\
= & \langle \textit{por } R.x \rangle \\
& (a⁇x = a⁇x) \wedge c > b \wedge a \neq b \\
= & \langle \textit{reflexividade de } = \textit{ e casos } c > b \wedge a \neq b \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

□

□

Questão 2. *Considere a seguinte definição de um algoritmo para ordenar uma seqüência.*

$$insSort.\bot = \bot \tag{11}$$

$$insSort.a \triangleleft \bot = (a \triangleleft \bot) \tag{12}$$

$$insSort.a \triangleleft x = a \rightsquigarrow (insSort.x) \tag{13}$$

Prove que $insSort.x$ é uma permutação de x.

Solução.

x é permutação de y quando eles têm exatamente os mesmos elementos, ou seja, quando:

$$\forall a : a \in A : a⁇ya⁇x$$

Há que provar essa proposição, quando $y = (insSort.x)$.

Prova.

Prova por indução de $R.x \triangleq a⁇(insSort.x) = a⁇x$.

Prova de $R.\bot$.

$a\mathbf{⁇}(insSort.\bot) = a\mathbf{⁇}\bot$

$=\langle$*primeiro axioma de insSort*$\rangle$

$a\mathbf{⁇}\bot = a\mathbf{⁇}\bot$

$=$

$true$

Prova de $R.b \triangleleft x$.

$a\mathbf{⁇}(insSort.b \triangleleft x) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x$

$\Leftarrow\langle$**Eliminação de** $\wedge\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(insSort.b \triangleleft x) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x) \wedge a = b$

$=\langle$*terceiro axioma de insSort*$\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(b \rightsquigarrow (insSort.x)) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x) \wedge a = b$

$=\langle$*por segundo axioma de* $\mathbf{⁇}\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(b \rightsquigarrow (insSort.x)) = 1 + a\mathbf{⁇}x) \wedge a = b$

$=\langle$*por teorema 6*$\rangle$

$(1 + a\mathbf{⁇}(insSort.x) = 1 + a\mathbf{⁇}x) \wedge a = b$

$=i\langle$*Por caso* $a = b\rangle$

$true$

Caso $a \neq b$.

$a\mathbf{⁇}(insSort.b \triangleleft x) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x$

$\Leftarrow\langle$**Eliminação de** $\wedge\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(insSort.b \triangleleft x) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x) \wedge a \neq b$

$=\langle$*terceiro axioma de insSort*$\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(b \rightsquigarrow (insSort.x)) = a\mathbf{⁇}.b \triangleleft x) \wedge a \neq b$

$=\langle$*por terceiro axioma de* $\mathbf{⁇}\rangle$

$(a\mathbf{⁇}(insSort.x) = a\mathbf{⁇}x) \wedge a \neq b$

$=porR.x$ $true \wedge a \neq b$

$=$

$true$

$\square$

$\square$

Questão 3. *Considere a seguinte definição cálculo de reverso de uma seqüência:*

$$rev.\perp = \perp \tag{14}$$

$$rev.c \triangleleft x = ((rev.x) \triangleright c) \tag{15}$$

Essa definição apresenta uma complexidade quadrática no tamanho da seqüência. Construa uma nova definição de reverso de uma seqüência, chamada lrev, que tenha complexidade linear em relação ao tamanho da seqüência e prove que

$$rev(x) = lrev(x)$$

para qualquer seqüência x.

Solução.

A solução foi apresentada em sala de aula e a prova de que a função é linear também. Os axiomas seguem.

$$lrev.x = irev(\perp, x) \tag{16}$$

$$irev(y, \perp) = y \tag{17}$$

$$irev(y, a \triangleleft x) = irev(a \triangleleft y, x) \tag{18}$$

Provar que

$$lrev(x) = rev(x)$$

é o mesmo que provar, dado o axioma 16, que

$$irev(\perp, x) = rev(x)$$

A prova é banal se assumido o lema 19. Ela é construída por casos:

Prova.

- $x = \perp$
  Trivial. Tente prová-la numa madrugada de sábado de tempestade, depois de passar por todos os lugares santos de Vitória.
- $x = a \triangleleft z$
  A prova segue e depende do lema 19.

$$
\begin{aligned}
& irev(\perp, c \triangleleft z) = rev.c \triangleleft z \wedge x = c \triangleleft z \\
= & \langle \textit{segundo axioma de irev} \rangle \\
& irev(c \triangleleft \perp, z) = rev.c \triangleleft z \wedge x = c \triangleleft z \\
= & \langle \textit{segundo axioma de rev} \rangle \\
& irev(c \triangleleft \perp, z) = (rev.z) \triangleright c \wedge x = c \triangleleft z \\
= & \langle lema \frown \triangleright \rangle \\
& irev(c \triangleleft \perp, z) = (rev.z) \frown (c \triangleleft \perp) \wedge x = c \triangleleft z \\
= & \langle \textit{por lema 19} \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

□

O lema em questão:

(19) $$irev(y, x) = (rev.x) \frown y$$

Prova.

Prova-se por indução que $R.x \triangleq bndAyy \in seq.airev(y, x) = (rev.x) \frown y$

$$
\begin{aligned}
& R.\perp \\
= & \\
& irev(y, \perp) = (rev.\perp) \frown y \\
= & \langle \textit{primeiro axioma de irev} \rangle \\
& y = (rev.\perp) \frown y \\
= & \langle \textit{primeiro axioma de rev e} \frown \rangle \\
& y = y \\
= & \\
& true
\end{aligned}
$$

Note que $R.a \triangleleft x \triangleq \forall y : y \in seq.A : irev(y,) \triangleleft = (rev.a \triangleleft x) \frown y$

$$
\begin{aligned}
& (R.a \triangleleft x)[y := z] \\
= & \\
& irev(z, a \triangleleft x) = (rev.a \triangleleft x) \mathbin{\hat{}\hat{}} z \\
= & \langle segundo\ axioma\ de\ irev \rangle \\
& irev(a \triangleleft z, x) = (rev.a \triangleleft x) \mathbin{\hat{}\hat{}} z \\
= & \langle segundo\ axioma\ de\ rev \rangle \\
& irev(a \triangleleft z, x) = ((rev.x) \triangleright a) \mathbin{\hat{}\hat{}} z \\
= & \langle lema \rangle \\
& irev(a \triangleleft z, x) = (rev.x) \mathbin{\hat{}\hat{}} ((a \triangleleft \perp) \mathbin{\hat{}\hat{}} z) \\
= & \langle segundo\ axioma\ de\ \hat{}\hat{} \rangle \\
& irev(a \triangleleft z, x) = (rev.x) \mathbin{\hat{}\hat{}} (a \triangleleft z) \\
= & \langle R.x\ com\ [z := a \triangleleft z] \rangle \\
& true
\end{aligned}
$$

□

Referências

[1] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffery D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, Addison-Wesley, 2001.