

SEQÜÊNCIAS: EXERCÍCIOS

RAUL H.C.LOPES

1. INTRODUÇÃO

Estas notas contêm exercícios sobre propriedades de seqüências. São requisitos para o entendimento dos mesmos:

- Lógica de primeira ordem

Todas as provas apresentadas usam lógica de primeira ordem e assumem os axiomas da igualdade: reflexividade, simetria e transitividade. Além disso, elas são apresentadas no estilo de *equational reasoning*, como em [2]. As seguintes constantes lógicas são usadas com a definição usual:

- $\wedge$, conjunção;
- $\vee$, disjunção;
- $\Rightarrow$, implicação;
- $\Leftarrow$, *only if*;
- $\forall$, quantificador universal;
- $\exists$, quantificador existencial;
- $=$, igualde, que, usado sobre expressões lógicas, substitui equivalência;
- $\vdash$, relação de dedutibilidade:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

de Γ é possível deduzir α .

- $\triangleq$, abreviação:

$$X \triangleq Y$$

X é um nome para Y : onde encontrar X , coloque Y .

Vale ressaltar que a igualdade é relação válida para qualquer par de objetos do mesmo tipo.

- A notação de pontos de Curry, ver página 34 de [1] é utilizada para reduzir o uso de parênteses. Resumidamente, ela estabelece:
 - São marcadores de pontuação (de agora em diante *markers*) ponto ($\cdot$), dois pontos, e *bullet* ($\bullet$), tendo força crescente nessa ordem.

- um *marker* à esquerda de um operador (relacional ou funcional, unário ou binário) fecha uma expressão (fecha um parênteses), cujo escopo se estende para a esquerda;
- um *marker* à direita de um operador (relacional ou funcional, unário ou binário) inicia uma expressão (abre um parênteses), cujo escopo se estende para a direita;
- o escopo de uma expressão obedece às seguintes leis:
 - (1) O escopo de uma expressão determinado por um *marker* respeita os tipos implícitos dos operadores que nela ocorrem.
 - (2) um *marker* colado a $\vdash$ ou $\triangleq$ tem prioridade sobre qualquer outro *marker*.
 - (3) Um *marker* colado a uma constante lógica tem prioridade sobre qualquer outro *marker* colado a operadores (relacionais ou funcionais) não lógicos.
 - (4) As constantes lógicas têm prioridade sobre outros operadores.
 - (5) Um *marker* tem prioridade sobre outro *marker* de mesma força situado à direita, desde que sejam respeitadas as regras anteriores.

2. SEQÜÊNCIAS

Uma seqüência de elementos de um tipo A é uma seqüência vazia (denotada por $\perp$) ou resultado de adicionar um elemento de A a uma seqüência de elementos de A . Os axiomas a seguir definem seqüências de elementos de A , denotada $seq.A$:

- $\perp \in seq.A$
- $(a \triangleleft x) \in seq.A$ se $x \in seq.A \wedge a \in A$
- fecho universal.

Assumindo que $x, y \in seq.A$ e que $a, b \in A$, os seguintes axiomas tratam a igualdade sobre seqüências.

- $\perp \neq (a \triangleleft x)$
- $(a \triangleleft x) = (b \triangleleft y) \text{ .}=\text{. } a = b \wedge x = y$

O princípio da indução sobre seqüências estabelece que se P é propriedade sobre seqüências:

$$(\forall x : x \in seq.A : P.x) = \\ (P(\perp) \wedge (\forall x : x \in seq.A : \forall a : a \in A : P(x) \Rightarrow P(a \triangleleft x)))$$

As equações a seguir definem o operador *snoc* (denotado $\triangleright$, em oposição, logicamente ao operador *cons*, $\triangleleft$).

- $\perp \triangleright a \text{ .} =. a \triangleleft \perp$
- $(a \triangleleft x) \triangleright b \text{ .} =. a \triangleleft (x \triangleright b)$

As equações a seguir definem um operador *cat* (denotado $\frown$) para concatenar duas seqüências.

- $\perp \frown y = y$
- $(a \triangleleft x) \frown y = .a \triangleleft (x \frown y)$

Pertinência em uma seqüência é definida a seguir.

- $a \notin \perp$
- $a \in (b \triangleleft x) \text{ .} =. a = b \vee a \in x$

A definição de inserção ordenada em uma seqüência segue. Assume-se que o tipo A é totalmente ordenado com os operadores $<$ e $\leq$ tendo o seu significado usual.

- $a \rightsquigarrow \perp = (a \triangleleft \perp)$
- $a \leq b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) \text{ .} =. a \triangleleft (b \triangleleft x))$
- $a > b \Rightarrow (a \rightsquigarrow (b \triangleleft x) \text{ .} =. b \triangleleft (a \rightsquigarrow x))$

A seguir, a definição de ordenação crescente não estrita.

- $(\perp) \nearrow$
- $(a \triangleleft \perp) \nearrow$
- $(a \triangleleft (b \triangleleft x)) \nearrow \text{ .} =. a \leq b \wedge (b \triangleleft x) \nearrow$

Exercício 1. *Prove que*

$$b < a \wedge (\forall c : c \in x : b \leq c) \Rightarrow \forall d : d \in a \rightsquigarrow x : b \leq d$$

Prova.

$$\begin{aligned} & \forall d : d \in a \rightsquigarrow x : b \leq d \\ \Leftarrow & \langle \text{por lema 5} \rangle \\ & \forall d : d = a \vee d \in x : b \leq d \\ = & \langle \text{range de } \forall \rangle \\ & b \leq a \wedge \forall d : d \in x : b \leq d \\ \Leftarrow & \langle \text{aritmética} \rangle \\ & b < a \wedge \forall d : d \in : b \leq d \end{aligned}$$

□

Exercício 2. *Prove que*

$$(b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow x \nearrow$$

Prova.

$\langle \text{Por casos de } x \rangle :$

$\langle \text{Caso } [x := \perp] \rangle$

$\perp. \nearrow$

$= \langle \text{axioma de } \nearrow \rangle$

true

$\langle \text{Caso } [x := c \triangleleft z] \rangle$

$(c \triangleleft z) \nearrow$

$\Leftarrow \langle \text{Eliminação de } \wedge \rangle$

$b \leq c \wedge (c \triangleleft z) \nearrow$

$= \langle \text{terceiro axioma de } \nearrow \rangle$

$(b \triangleleft c \triangleleft z) \nearrow$

□

Exercício 3. *Prove que*

$$(\forall a : a \in x : b \leq a) \wedge x. \nearrow \Rightarrow b \triangleleft x. \nearrow$$

Prova.

$\langle \text{Por casos de } x \rangle :$

$$\begin{aligned}
 & b \triangleleft x. \nearrow \\
 \Leftarrow & \langle \text{Eliminação de } \wedge \rangle \\
 & b \triangleleft x. \nearrow \wedge x = \perp \\
 = & \\
 & b \triangleleft \perp. \nearrow \wedge x = \perp \\
 = & \langle \text{segundo axioma de } \nearrow \rangle \\
 & \text{true} \wedge x = \perp \\
 = & \langle \text{identidade de } \wedge \rangle \\
 & x = \perp \\
 & = \langle \text{Caso } [x := \perp] \rangle \\
 & \text{true} \\
 & \langle \text{caso } [x := c \triangleleft z] \rangle \\
 & b \triangleleft x. \nearrow \\
 \Leftarrow & \langle \text{Eliminação de } \wedge \rangle \\
 & b \triangleleft x. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \\
 & (b \triangleleft .c \triangleleft z) \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \langle \text{terceiro axioma de } \nearrow \rangle \\
 & b \leq c \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 \Leftarrow & \langle \text{Eliminação de } \wedge \rangle \\
 & b \leq c \wedge (\forall a : a \in z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \\
 & (\forall a : a = c \vee a \in z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
 & (\forall a : a \in .c \triangleleft z : b \leq a) \wedge c \triangleleft z. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \\
 & (\forall a : a \in .x : b \leq a) \wedge x. \nearrow \wedge x = .c \triangleleft z \\
 = & \langle \text{premissa do teorema e caso } [x := c \triangleleft z] \rangle \\
 & \text{true}
 \end{aligned}$$

□

Exercício 4. *Prove que*

$$\forall b : b \in A : (b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in x : b \leq a$$

Prova.

Por indução: trivial quando $x = \perp$.

Assuma $R.x \triangleq \forall b : b \in A : (b \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in x : b \leq a$.

Prove $R.\forall \triangleleft : b : b \in A.c \triangleq (b \triangleleft (c \triangleleft x)) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in (c \triangleleft x) : b \leq a$.

Assuma $b \triangleleft (c \triangleleft x) \nearrow$.

$$\begin{aligned} & \forall a : a \in . c \triangleleft x : d \leq a \\ \Leftarrow & \langle \text{por } R.x \rangle \\ & (d \triangleleft x) \nearrow \\ \Leftarrow & \langle \text{Eliminação de } \wedge \rangle \\ & d \leq c \wedge (d \triangleleft x) \nearrow \\ = & \langle \text{terceiro axioma de } \nearrow \rangle \\ & d \triangleleft (c \triangleleft x) \nearrow \\ = & \langle \text{premissa do teorema} \rangle \\ & \text{true} \end{aligned}$$

□

Exercício 5. *Prove que*

$$(a \in (b \rightsquigarrow x)) \Rightarrow a = b \vee a \in x$$

Prova.

Por indução.

Trivial quando $x = \perp$.

Assuma $R.x \triangleq (a \in (b \rightsquigarrow x)) \Rightarrow a = b \vee a \in x$

Prove $R.c \triangleleft x \triangleq (a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x))) \Rightarrow a = b \vee a \in (c \triangleleft x)$

Prova por casos, considerando $b \leq c$ e $c < b$.

Caso $b \leq c$.

$$\begin{aligned}
 & a = b \vee a \in .c \triangleleft x \\
 & = \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
 & a \in .b \triangleleft (c \triangleleft x) \\
 & \Leftrightarrow \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
 & b \leq c \wedge a \in .b \triangleleft (c \triangleleft x) \\
 & \Leftrightarrow \langle \text{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
 & b \leq c \wedge a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \\
 & = \langle \text{premissa do teorema e caso } [b \leq c] \rangle \\
 & \text{true}
 \end{aligned}$$

Caso $c < b$.

$$\begin{aligned}
 & a = b \vee a \in .c \triangleleft x \\
 & = \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
 & a = b \vee a = c \vee a \in x \\
 & = \langle \text{comutatividade de } \vee \rangle \\
 & a = c \vee (a = b \vee a \in x) \\
 & \Leftrightarrow \langle R.x \rangle \\
 & a = c \vee a \in (b \rightsquigarrow x) \\
 & = \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
 & a \in c \triangleleft (b \rightsquigarrow x) \\
 & \Leftrightarrow \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle \\
 & c < b \wedge a \in c \triangleleft (b \rightsquigarrow x) \\
 & = \langle \text{segundo axioma de } \rightsquigarrow \rangle \\
 & c < b \wedge a \in (b \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \\
 & = \langle \text{premissa e caso } c < b \rangle \\
 & \text{true}
 \end{aligned}$$

□

Exercício 6. Prove que

$$x. \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow x) \nearrow$$

Prova.

Por indução.

Caso base, $x = \perp$, é trivial.

Assuma $R.x \stackrel{\Delta}{=} x. \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow x) \nearrow$
Prove $R.c \triangleleft x \stackrel{\Delta}{=} (c \triangleleft x) \nearrow \Rightarrow \forall a : a \in A : (a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
Assuma $(c \triangleleft x) \nearrow$
Prove $(a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
Prova por casos: $a \leq c$ e $a > c$.
Caso $a \leq c$ *é trivial.*
Caso $a > c$.

$(a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
 $\Leftarrow \langle \textbf{Eliminação de } \wedge \rangle$
 $c < a \wedge (a \rightsquigarrow (c \triangleleft x)) \nearrow$
 $= \langle \textit{terceiro axioma de } \rightsquigarrow \rangle$
 $c < a \wedge (c \triangleleft (a \rightsquigarrow x)) \nearrow$
 $\Leftarrow \langle \textit{por lema 1} \rangle$
 $b < a \wedge ((\forall c : c \in a \rightsquigarrow x : b \leq c) \wedge (a \rightsquigarrow x) \nearrow)$
 $\Leftarrow \langle \textit{por lema 2 e por } R.x \rangle$
 $b < a \wedge (\forall c : c \in a \rightsquigarrow x : b \leq c) \wedge b \triangleleft x. \nearrow$
 $= \langle \textit{por lema 5} \rangle$
 $b < a \wedge (\forall c : c \in x : b \leq c \wedge b \triangleleft x. \nearrow$
 $\Leftarrow \langle \textit{por lema 4} \rangle$
 $b < a \wedge b \triangleleft x. \nearrow$
 $= \langle \textit{premissas} \rangle$
true

□

REFERÊNCIAS

- [1] Haskell B. Curry, *Foundations of mathematical logic*, Dover Publications, Inc., 1977.
- [2] David Gries and Fred B. Schneider, *A logical approach to discrete mathematics*, Springer-Verlag, 1993.