ESTRUTURAS DE DADOS
PROVA 1
BEOWULF

RAUL H.C. LOPES

1. Introdução

A correção das três primeiras questões da prova segue. A última está pendente e ainda vale pontos.

Esta foi uma prova fácil. O objetivo fundamental dela consistia em exercitar mais uma vez prova por indução, mas desta vez impondo rigor formal na apresentação da prova. Pelo que já pude ver a maioria fez as três questões. Certas? Veremos. Mas... Se você não acertar ao menos duas questões desta prova, está na hora de você se perguntar o que está fazendo neste curso. O que você faz quando eu faço o mesmo tipo de prova no quadro? Quantos exercícios da lista você resolveu?

A próxima prova certamente elevará o nível do desafio intelectual. Afinal, só por isso estamos aqui.

2. Axiomas

Considere que seqüências sobre elementos de um conjunto A, denotadas $seq.A$, são definidas indutivamente pelo seguinte conjunto de axiomas:

- A seqüência vazia ε está em $seq.A$.

$$\varepsilon \in seq.A \tag{1}$$

- Adicionando um elemento de A a uma $seq.A$ produz nova $seq.A$.

$$c \in A \wedge x \in seq.A \Rightarrow c \triangleleft x \tag{2}$$

- Closure

Em adição considere os axiomas definindo igualdade de seqüências e indução sobre seqüências.

- A seqüência vazia ε é diferente de qualquer seqüência não vazia.

$$c \triangleleft x \neq \varepsilon \tag{3}$$

- Duas seqüências são iguais quando seus componentes são respectivamente iguais.

$$(b \triangleleft x = c \triangleleft y) = (b = c \wedge x = y) \tag{4}$$

- Princípio de inndução.

$$(\forall x : x \in seq.A : P.x) = (P.\varepsilon \wedge \forall c \in A : x \in seq.A : P.x \Rightarrow P(c \triangleleft x)) \tag{5}$$

3. As questões

Questão 1. *Dados os seguintes axiomas:*

$$\forall y \in seq.A : \varepsilon \mathbin{\hat{}\hat{}} y = y \tag{6}$$
$$\forall a \in A : \forall x, y \in seq.A : (a \triangleleft x) \mathbin{\hat{}\hat{}} y = a \triangleleft (x \mathbin{\hat{}\hat{}} y) \tag{7}$$
$$len.\varepsilon = 0 \tag{8}$$
$$\forall a \in A : \forall x \in seq.A : len.a \triangleleft x = 1 + len.x \tag{9}$$

Prove que

$$\forall x, y \in seq.A : len.x \mathbin{\hat{}\hat{}} y = len.x + len.y$$

Solução.

$$P.x = \forall y \in seq.A : x.pref.y = (\exists z : z \in seq.A : x \mathbin{\hat{}\hat{}} z = y)$$

Provando $P.\varepsilon$

$$\begin{aligned}
& len.\varepsilon \mathbin{\hat{}\hat{}} y \\
=& \langle \text{ pelo primeiro axioma para } len \rangle \\
& len.y \\
=& 0 + len.y \\
=& \langle \text{primeiro axioma de } len \rangle \\
& len.\varepsilon + len.y
\end{aligned}$$

Provando $\forall x \in seq.A : P.x \Rightarrow P.a \triangleleft x$

$$
\begin{aligned}
& len.(a \triangleleft x)\frown y \\
& \quad = \langle \text{segundo axioma de } \frown \rangle \\
& \quad\; len.a \triangleleft x \frown y \\
& \quad = \langle \text{segundo axioma de } len \rangle \\
& \quad\; 1 + len.x \frown y \\
& \quad = \langle \text{por } P.x \rangle \\
& \quad\; 1 + (len.x + len.y) \\
& \quad = \langle \text{aritmética} \rangle \\
& \quad\; (1 + len.x) + len.y \\
& \quad = \langle \text{segundo axioma de } len \rangle \\
& \quad\; len.a \triangleleft x + len.y
\end{aligned}
$$

$\square$

Questão 2. *Considere ainda os axiomas que definem* $\frown$ *e os axiomas abaixo:*

(10) $\forall a \in A : \neg(a \in \varepsilon)$

(11) $\forall a, b \in A : \forall x \in seq.A : (a \in b \triangleleft x) = (a = b \vee a \in x)$

Prove:

$$\forall b \in A : \forall x, y \in seq.A : b \in x \frown y = (b \in x) \vee (b \in y)$$

Solução.

$$P.x = \forall b \in A : \forall y \in seq.A : b \in x \frown y = (b \in x) \vee (b \in y)$$

Provando $P.\varepsilon$

$$P.\varepsilon = (b \in \varepsilon \frown y = (b \in \varepsilon \vee b \in y)$$

$$
\begin{aligned}
& b \in \varepsilon \frown y \\
& \quad = \langle \text{por primeiro axioma de } \frown \rangle \\
& \quad b \in y \\
& \quad = \langle \text{propriedade da disjunção} \rangle \\
& \quad b \in \varepsilon \vee b \in y
\end{aligned}
$$

Provando $\forall x \in seq.A : P.x \Rightarrow P.a \triangleleft x$

$$P.a \triangleleft x = (b \in (a \triangleleft x)\frown y = (b \in a \triangleleft x \vee b \in y)$$

$$
\begin{aligned}
& b \in (a \triangleleft x)^\frown y \\
=& \langle \text{segundo axioma de } ^\frown \rangle \\
& b \in a \triangleleft (x^\frown y) \\
=& \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
& b = a \vee (b \in x^\frown y) \\
=& \langle \text{por } P.x \rangle \\
& b = a \vee (b \in x \vee b \in y) \\
=& \langle \text{associatividade da disjunção} \rangle \\
& (b = a \vee b \in x) \vee b \in y \\
=& \langle \text{segundo axioma de } \in \rangle \\
& b \in a \triangleleft x \vee b \in y
\end{aligned}
$$

□

Questão 3. *Dados os axiomas*

$$\forall a \in A : a.del.\varepsilon = \varepsilon \tag{12}$$

$$\forall a \in A : \forall x \in seq.A : a.del.a \triangleleft x = x \tag{13}$$

$$\forall a, b \in A : \forall x \in seq.A : b \neq a \Rightarrow (a.del.b \triangleleft x = b \triangleleft (a.del.x)) \tag{14}$$

Prove que

$$\forall a, b \in A : \forall x \in seq.A : a.del.(b.del.x) = b.del.(a.del.x)$$

Solução.

Existem dois casos a considerar:
Caso $a = b$: o teorema é obviamente verdadeiro.
Caso $a \neq b$: a prova segue pelo axioma de indução.

$$P.x = \forall a, b \in A : a.del.(b.del.x) = b.del.(a.del.x)$$

Provando $P.\varepsilon$

$$P.\varepsilon = \forall a, b \in A : a.del.(b.del.\varepsilon) = b.del.(a.del.\varepsilon)$$

A prova é óbvia dado que os dois lados se reduzem a ε.
Provando $P.c \triangleleft x$

$$P.c \triangleleft x = \forall a, b \in A : a.del.(b.del.c \triangleleft x) = b.del.(a.del.c \triangleleft x)$$

Há três casos a considerar:

Caso $c \neq a \wedge c = b$

$$
\begin{aligned}
& a.del.(b.del.c \triangleleft x) \\
=& \langle c = b \rangle \\
& a.del.(b.del.b \triangleleft x) \\
=& \langle \text{segundo axioma de } del \rangle \\
& a.del.x \\
=& \langle \text{segundo axioma de } del \rangle \\
& c.del.(c \triangleleft a.del.x) \\
=& \langle c = b \rangle \\
& b.del.(c \triangleleft a.del.x) \\
=& \langle \text{terceiro axioma de } del \rangle \\
& b.del.(a.del.c \triangleleft x)
\end{aligned}
$$

Caso $c = a \wedge c \neq b$

$$
\begin{aligned}
& a.del.(b.del.c \triangleleft x) \\
=& \langle c \neq b \rangle \\
& a.del.(c \triangleleft (b.del.x) \\
=& \langle \text{segundo axioma de } del \text{ e } a = c \rangle \\
& b.del.x \\
=& \langle \text{segundo axioma de } del \rangle \\
& b.del.(a.del.a \triangleleft x) \\
=& \langle c = a \rangle \\
& b.del.(a.del.c \triangleleft x)
\end{aligned}
$$

Caso $c \neq a \land c \neq b$

$$
\begin{aligned}
& a.del.(b.del.c \lhd x) \\
=& \langle \text{terceiro axioma de } del \rangle \\
& a.del.(c \lhd b.del.x) \\
=& \langle \text{terceiro axioma de } del \rangle \\
& c \lhd a.del.(b.del.x) \\
=& \langle P.x \rangle \\
& c \lhd b.del.(a.del.x) \\
=& \langle \text{terceiro axioma de } del \rangle \\
& b.del.(c \lhd a.del.x) \\
=& \langle \text{terceiro axioma de } del \rangle \\
& b.del.(a.del.c \lhd x)
\end{aligned}
$$

□

Questão 4. *Apresente conjunto de axiomas que define a relação "x é permutação de y." Prove que essa relação é transitiva. (Esta questão resolvida completamente e correta substitui as outras três.)*

4. As notas

As notas seguem. Pedidos de revisões devem ser encaminhados por escrito na própria prova. Confiram com atenção as notas de cada questão.

Aluno	Q.0	Q.1	Q.2
A.D.Fernandes	10	10	10
A.F.Martins	9	10	6
B.F.Monteiro	10	10	10
B.M.Segrini	10	10	10
C.B.Grobério	10	8	0
D.C.Velasco	10	10	9
D.M.Sana	0	0	0
E.C.F.Amorin	10	10	9
F.T.A.Franzoni	10	10	10
G.Feeblug	10	10	6
J.C.P.Antunes	0	0	0
L.A.Rodrigues	0	0	0
L.D.Contadini	10	10	10
L.M.Barbiero	10	10	9
N.A.Rasseli	9	9	0
R.F.Douro	8	8	8
R.O.Santos	10	10	10
V.A.Ventura	10	0	0
V.C.Zamborlini	10	10	10
W.K.Nascimento	10	10	6
W.S.Rocha	10	10	9

A próxima será será no último dia de aula, contendo 5 questões. Vejam exercícios preparatórios na página, no próximo dia 10/10.

5. Hwæt wē Gār-Dena in geār-Dagum...

> "Nós cá, embora vivamos neste cu de mundo, temos ouvido grandes louvores a vosso respeito"
>
> José Saramago, **A História do Cerco de Lisboa**

"Processado!" "O quê? Onde? Com quem?"