ESTRUTURAS DE DADOS
PROVA 0
SOLUÇÃO E NOTAS

RAUL H.C. LOPES

1. Introdução

Neste documento você encontra:

- outline de solução das questões da prova;
- comentários
- notas da prova;

2. As questões

Questão 1. *Seja $\mathcal{P}.S$ o conjunto de todos os subconjuntos de S e $\#S$, o número de elementos de S. Prove que $\mathcal{P}.S = 2^{\#S}$. Dica: Qualquer subconjunto de um conjunto de n elementos pode ser representado por uma seqüência de n booleanos, cada um indicando se determinado elemento do conjunto original ocorre ou não no subconjunto em questão.*

Solução.
Por indução sobre número de elementos do conjunto.

- $\#S = 0$: $\mathcal{P}.S$ tem um único elemento e $2^{\#S} = 2^0 = 1$.
- Assuma que $\mathcal{P}.S = 2^{\#S}$ quando $\#S = n$.Qualquer conjunto S' tal que $\#S' = n + 1$ pode ser obtido a partir de $S' = S \cup \{a\}$, onde $a \notin S$ e $a \in S'$ e $S \subset S'$. Nessas condições, $\mathcal{P}.S = 2^n$ e o conjunto de todos os conjuntos de S' é

  $$\mathcal{P}.S' = \{x : x \in \mathcal{P}.S\} \cup \{x \cup \{a\} : x \in \mathcal{P}\}$$

  A união de dois conjutnos disjuntos com 2^n elementos cada, totalizando 2^{n+1} elementos.

□

Questão 2. *Veja a função a seguir.*

```
gcd (m,n) = if m < n
            then gcd(m,n-m)
            else if m > n
```

Date: 17/02/2003.

```
then gcd(m-n,n)
else m
```

Prove que, se a e b são inteiros maiores do que zero, $gdc(a,b)$ termina e produz o maior divisor comum de a e b.

Solução.

A função termina. O par de argumentos forma uma cadeia decrescente finita:

$$((m_0, n_0) \prec (m_1, n_1,)) = m_0 < m_1 \vee (m_0 = m_1 \wedge n_0 < n_1)$$

Note que na primeira chamada recursiva $m < n$ e o primeiro argumento da chamada é mantido, decrescendo o segundo. Na segunda chamada recursiva, $m > n$ e o primeiro argumento decresce. Isso decreta a existência da cadeia decrescente. Note também que ela é finita porque inicialmente $a > 0$ e $b > 0$ e cada chamanda recursiva usa um par de argumentos que são positivos.

A função cálcula o máximo divisor comum. Isso se deve a dois a três fatos fáceis de verificar:

- Dado $m < n$, os divisores de m e n são os divisores de $n - m$, logo $gcd(m,n) = gcd(m, n-m)$.
- Dado $m > n$, os divisores de m e n são os divisores de $m - n$, logo $gcd(m,n) = gcd(m-n, n)$.
- o maior divisor comum de m e m é, obviamente, m.

□

Questão 3. *Considere a definição a seguir.*

$$\begin{aligned}
F_0 =& 0 \\
F_1 =& 1 \\
F_n =& F_{n-1} + F_{n-2}, \ \textit{para } n > 1
\end{aligned}$$

Prove que, para todo n inteiro ($n \geq 0$), $F_n < 2^n$.

Solução.

Por indução forte.

- $k = 0 : F_k = 0 < 2^0$
- $k = 1 : F_k = 1 < 2^1$

- Assuma que $\forall k : 0 \leq k \leq n : F_k < 2^k$. Prova-se que $F_{n+1} < 2^{n+1}$.

$F_k < 2^k$	por hipótese indutiva
$F_{k-1} < 2^{k-1}$	por hipótese indutiva
$F_k + F_{k-1} < 2^k + 2^{k-1}$	aritmética
$F_{k+1} < 2^k + 2^{k-1}$	
$F_{k+1} < 2^k + 2^k$	
$F_{k+1} < 2^{k+1}$	

3. Comentários sobre alguns erros comuns nas provas

3.1. Questão1.

3.1.1. *Ouviu o galo cantar, mas...* Cidadão começou a prova no mesmo caminho apresentado acima, mas... Parou na hipótese de indução. Ok! O professor de **Estruturas de Dados** é horrível e ele não pescou nada. Então... Mudou de tática: partiu para resolver, usando uma notícia de algum passado distante de que o número de subconjuntos de um conjunto é dado por

$$\sum_{0 \leq r \leq n} C(n, r)$$

o que é verdade. Mas, ele tinha só uma notícia difusa. e escreveu que antes iria provar que

$$2 \times \sum_{0 \leq n \leq k} C(k, n) = \sum_{0 \leq n \leq k} C(k+1, n)$$

E... parou por aí! Moral da história: para contruir a prova de um teorema é preciso mais do que notícias distantes. Dado que as provas do professor de **Estruturas de Dados** sempre tiveram, têm e terão provas de propriedades de algoritmos... "Hum!!! Cumpricô! Já sei. Processa o cara ao final do semestre! Nada disso! Processa agora antecipando futuros danos possíveis!"

3.1.2. *Pontinhos não é argumento formal.* Então, o aluno concluiu que, dada a sugestão de representação de cada subconjunto como seqüência de booleanos, bastava fazer:

$$2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^{n+1}$$

O problema é que "pontinhos" não constituem argumento formal nem aqui nem na China: "pontinhos" servem apenas de evidência de trilha em dada direção. O objetivo da dica era: assuma que é possível construir 2^n seqüências de n booleanos e prove que existem $2^n + 1$ seqüências de $n + 1$ booleanos.

3.2. **E aquela indução da série de Fibonacci!** Na solução da dita, o aluno começou provando que $F_0 < 2^0$. Excelente! Partiu para a hipótese de indução e despejou[1] a prova de que $F_{k+1} < 2^{k+1}$. Excelente! Ou quase... Ou nem tão bom! Ou péssimo! Por esse caminho é possível provar que, dada a série

$$
\begin{aligned}
F_0 &= 0 \\
F_1 &= 256 \\
F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ para } n > 1
\end{aligned}
$$

$\forall n : n \geq 0 : F_n < 2^n$.

Caçamba!

Bem... foi resolvido um exercício extremamente parecido com esse em sala de aula.

> "Alguém aí acorda o baterista, pô!!!"
> "Não! Processa o professor que nossos meninos não precisam desses conhecimentos intrincados!"
> "Se tiver sobrenome de bandido ganha na certa! E se for orientando de pedagogo genial extermina!"
> "'Tá muito cauboi, hoje! Pode parar que tem busha na linha."
> "De quem?"
> "Ninguém! É erro de portinglês!"
> "Já sei! Pra NASA pescar e a NSA não decifrar!"
> "E nem os padres da vida!"
> "Tu de novo?"

[1]Sentiram minha linguagem de herói americano despejando iraquianos amigos no lixo?

4. Resultados

As notas seguem. Como até hoje não recebi as pautas com os nomes e números de matrícula seguem os nomes que pude decifrar na prova.

Aluno	Q.0	Q.1	Q.2
A.D.Fernandes	10	0	8
A.F.Martins	8	0	10
B.F.Monteiro	10	0	6
B.M.Segrini	8	0	10
C.B.Grobério	10	10	4
D.C.Velasco	10	0	10
D.M.Sana	0	8	10
E.C.F.Amorin	8	0	4
F.T.A.Franzoni	10	8	10
G.Feeblug	8	0	0
J.C.P.Antunes	0	0	0
L.A.Rodrigues	0	0	0
L.D.Contadini	10	4	10
L.M.Barbiero	0	0	10
N.A.Rasseli	10	0	0
R.F.Douro	0	0	10
R.O.Santos	8	0	10
V.A.Ventura	10	0	10
V.C.Zamborlini	10	0	10
W.K.Nascimento	10	0	10
W.S.Rocha	10	0	10

5. O futuro

Ao longo do semestre realizaremos 3 ou 4 provas, num total de ao menos 10 questões. A nota de cada aluno nas provas será dada pela média das $n-1$ notas mais altas, assumindo n questões em provas ao longo do semestre.

Como explicado no primeiro dia de aula, a nota das provas tem peso 6 na média final.