$1^{\underline{o}}$ Trabalho de Algoritmos Numéricos II - 2013/1
Algoritmos Implícitos de Avanço no Tempo
Equação do Poisson Bidimensional Transiente

Data de entrega: 21 de julho de 2013

Considerar os algoritmos implícito e Crank-Nicolson para resolver a equação de Poisson bidimensional pelo método das diferenças finitas. Desejamos encontrar $u(x, y, t)$ que satisfaça a equação diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y, t) \tag{1}$$

onde $(x, y) \in \mathcal{R}$, uma região do plano (x, y), $a > 0$ e $t > 0$. A equação diferencial (1) satisfaz as seguintes condicões:

- Condições de Contorno:
  $u(x, y, t) = g(t)$ e/ou $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = q(t)$ no contorno de $\mathcal{R}$
- Condições Iniciais:
  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ em $\mathcal{R}$

Deseja-se obter a solução $u(x, y, t)$ no interior de um domínio retangular de dimensões $\mathcal{R} = (0, l_1) \times (0, l_2)$ para $t \in (0, T)$. Considere uma subdivisão do domínio em células retangulares, sendo $n - 1$ no eixo x e $m - 1$ divisões no eixo y, respectivamente, de dimensões h_x e h_y e uma divisão no tempo $t_k = k\Delta t$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Etapas do Trabalho

1 Implementação

Faça dois códigos modulares para resolver a equação de Poisson Transiente pelo método de diferenças finitas utilizando os esquemas implícito e Crank-Nicolson. Cada programa principal deve ter a seguinte estrutura:

- Leitura dos dados (pode ser feita através de um arquivo de entrada);
- Montagem do sistema esparso resultante para cada esquema (implícito ou Crank-Nicolson)
- Tratamento das condições de contorno. Considere a possibilidade da condição de contorno ser uma função de (x, y, t);

- Solução do sistema esparso pelo método SOR utilizando um esquema otimizado de armazenamento da matriz resultante dos esquemas transientes.
- Impressão dos resultados em um arquivo de saída do tipo texto, que será utilizado pelo Octave ou Gnuplot;
- Função para o cálculo da solução exata e erro cometido quando for necessário.
- Função de pós-processamento para cálculos de derivadas quando for o caso.

2 Validação - Equação do Calor com condutividade unitária

Teste o seu programa considerando a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad \text{em } \mathcal{R} = (0, 1) \times (0, 1) \tag{2}$$

sendo $f(x, y)$ tal que $u_e(x, y) = t^2 x(x-1)y(y-1)$ é a solução exata da equação. Considere condições de contorno de valor prescrito em todos os pontos do contorno.

- Apresente o gráfico da solução encontrada e o gráfico da solução exata nos tempos: $t = 0.5$ e $t = 1.0$ para os dois tipos de avanço no tempo considerando o método SOR com um w adequado na solução do sistema linear.
- Utilize a seguinte expressão do erro para comparar a solução aproximada com solução exata:

  $$erro(u) = \frac{\left(\sum_i^{n*m} (u_i - u_{ei})^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_i^{n*m} (u_{ei})^2\right)^{1/2}} \tag{3}$$

  Faça um estudo do comportamento da solução aproximada para os dois esquemas implementados:

  - Considere na sua análise o erro (3) em um tempo no interior do intervalo (por exemplo, $t = 0.5$)
  - Escolha tamanhos diferentes do problema considerando $n = m$, $n > m$ e $n < m$.

- Qual o melhor esquema de avanço no tempo para esse problema, considerando tempo de processamento, convergência, erro cometido e método de solução do sistema linear?

3 Aplicação - Distribuição da pressão em reservatórios de petróleo de baixa compressibilidade

A distribuição de pressão em reservatórios de petróleo de baixa compressibilidade pode ser simulada pela equação:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

onde $p(x, y, t)$ representa a pressão e

$$a = \frac{K}{\phi \mu c} \tag{5}$$

sendo que: K permeabilidade, ϕ porosidade, μ viscosidade e c compressibilidade, são propriedades do meio poroso e do fluido. Um problema acadêmico padrão é conhecido como o problema dos 5 poços (ou *five-spot*). É considerado um reservatório quadrado com 1 poço injetor no centro e 4 poços produtores nos vértices. Porém a distribuição de pressão é simétrica nas duas direções, portanto pode ser analisada a distribuição da pressão somente em $\frac{1}{4}$ do quadrado (observe a Fig. 1). Assim, considera-se o domínio $\mathcal{R}$ como o quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, sendo o poço injetor localizado em $(x, y) = (0, 0)$ e um poço produtor em $(x, y) = (1, 1)$. Neste caso o fluxo do fluido é nulo nas arestas de $\mathcal{R}$ devido à simetria na distribuição dos poços (i.e. velocidade nula nas arestas). Pela Lei de Darcy, a velocidade do fluido é dada por:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \qquad v_y = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{6}$$

Portanto, tem-se como condição de contorno para a equação (4) a derivada normal da pressão nula nas arestas:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t) = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \partial \mathcal{R}. \tag{7}$$

A pressão no poço injetor e no poço produtor possuem valores conhecidos, respectivamente, dados por:

$$p(0, 0, t) = p_I \qquad p(1, 1, t) = p_{ref} \qquad t > 0 \tag{8}$$

A condição inicial a ser adotada é $p(x, y, 0) = p_{ref}$ como nível de referência de pressão.

- Considere $K = 100$, $\phi = 0.1$, $\mu = 1$ e $c = 10.0$ em um sistema de dimensòes compatíveis. A pressão de referência é $p_{ref} = 0.0$ e a pressão no poço injetor é $p_I = 100$.
- Apresente o gráfico da solução encontrada $t = 1.0$ para os dois tipos de avanço no tempo considerando o método SOR com um w adequado na solução do sistema linear.

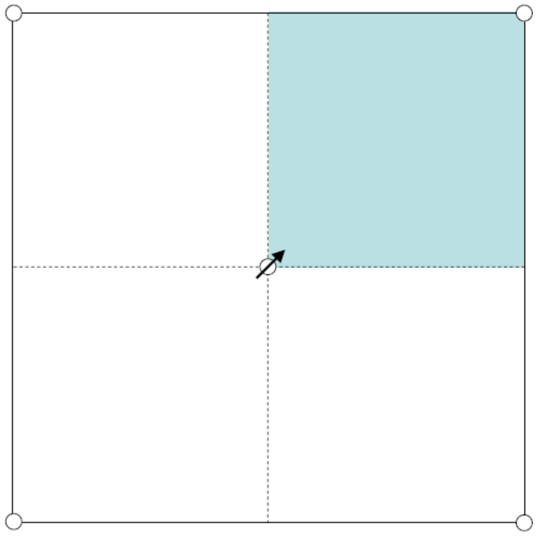

Figura 1: Geometria do Problema dos 5 poços.

- Utilizando uma aproximação por diferenças finitas para a velocidade definida pela Eq. (6) apresente o gráfico da velocidade.

- Faça um estudo comparativo dos métodos Implícitos e Crank-Nicolson com o método SOR e tamanhos diferentes do problema sendo $n = m$, $n > m$ e $n < m$.

4 Estrutura do relatório

O relatório deve ser escrito observando as normas do padrão ABNT. A divisão do relatório deve ser de acordo com as seguintes seções:

- **Introdução:** apresentar a estrutura do trabalho e os objetivos

- **Método das Diferenças finitas:** um pequeno resumo considerando todas as técnicas e ordens de aproximação consideradas.

- **Implementação:** onde serão apresentados a estutura do código e partes significativas do código comentado.

- **Experimentos Numéricos:** onde serão apresentados os exemplos testes utilizados, tanto as entradas para os programas bem como tabelas e gráficos das respectivas saídas geradas pelas soluções.

- **Conclusão:** onde serão discutidos os resultados obtidos.