

2^o Exercício de algoritmos Numéricos II - 13/1

Distribuição da pressão em reservatórios de petróleo de baixa compressibilidade

A distribuição de pressão em reservatórios de petróleo de baixa compressibilidade pode ser simulada pela equação:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

onde $p(x, y, t)$ representa a pressão e

$$a = \frac{k}{\phi \mu c} \quad (2)$$

sendo que: K permeabilidade, ϕ porosidade, μ viscosidade e c compressibilidade, são propriedades do meio poroso e do fluido. Um problema acadêmico padrão é conhecido como o problema dos 5 poços (ou *five-spot*). É considerado um reservatório quadrado com 1 poço injetor no centro e 4 poços produtores nos vértices. Porém a distribuição de pressão é simétrica nas duas direções e pode ser analisada a distribuição da pressão em apenas $\frac{1}{4}$ do quadrado (observe Fig. 1). Assim, considera-se o domínio \mathcal{R} como o quadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, sendo o poço injetor localizado em $(x, y) = (0, 0)$ e um poço produtor em $(x, y) = (1, 1)$. Neste caso o fluxo do fluido é nulo nas arestas de \mathcal{R} devido à simetria na distribuição dos poços (i.e. velocidade nula nas arestas). Pela Lei de Darcy, a velocidade do fluido é dada por:

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

Portanto, tem-se como condição de contorno para a equação (1) a derivada normal da pressão nula nas arestas:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x, y, t) = 0 \quad \text{para } (x, y) \in \partial \mathcal{R}. \quad (4)$$

A pressão no poço injetor e no poço produtor possuem valores conhecidos, respectivamente, dados por:

$$p(0, 0, t) = p_I \quad p(1, 1, t) = p_{ref} \quad t > 0 \quad (5)$$

A condição inicial a ser adotada é $p(x, y, 0) = p_{ref}$ como nível de referência de pressão.

- Considere $k = 100$, $\phi = 0.1$, $\mu = 1$ e $c = 10.0$ em um sistema de dimensões compatíveis. A pressão de referência é $p_{ref} = 0.0$ e a pressão no poço injetor é $p_I = 100$.
- Considere o domínio discretizado $N \times M = 4 \times 5$.

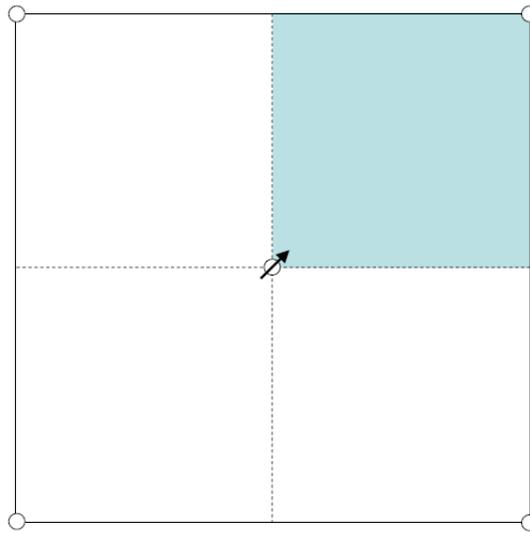


Figura 1: Geometria do Problema dos 5 poços.

- Construa a formulação de diferenças finitas para a Equação (1) pelo método implícito, apresentando todos os passos descritos na sala de aula: (i) discretização do domínio, (ii) aplicação das equações de diferenças finitas, (iii) aplicação das condições de contorno considerando aproximações de primeira ordem.
- Construa a formulação de diferenças finitas para a Equação (1) pelo método de Crank-Nicolson, apresentando todos os passos descritos na sala de aula: (i) discretização do domínio, (ii) aplicação das equações de diferenças finitas, (iii) aplicação das condições de contorno considerando aproximações de primeira ordem.
- Apresente a expressão geral do método SOR para as formulações desenvolvidas nos itens anteriores considerando um esquema otimizado de armazenamento da matriz dos coeficientes.