Introdução ao Curso de Métodos Numéricos I

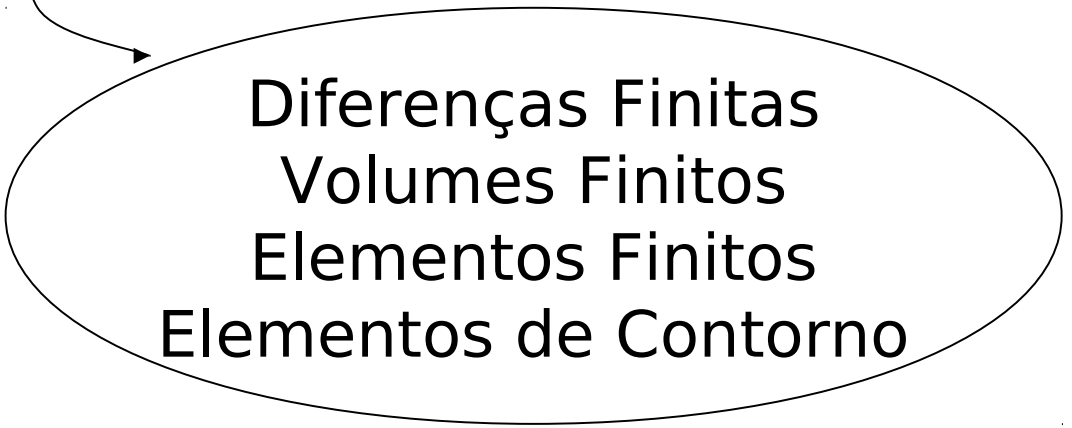
Lucia Catabriga

Departamento de Informática

CT/UFES

Processo de Solução

- Fenômeno Natural
- Modelo Matemático - Equações Governantes
- Métodos de Aproximação



Processo de Solução

Não dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio

↓

Solução do Sistema Linear

Dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio Eq. Diferencial Ordinária

↓

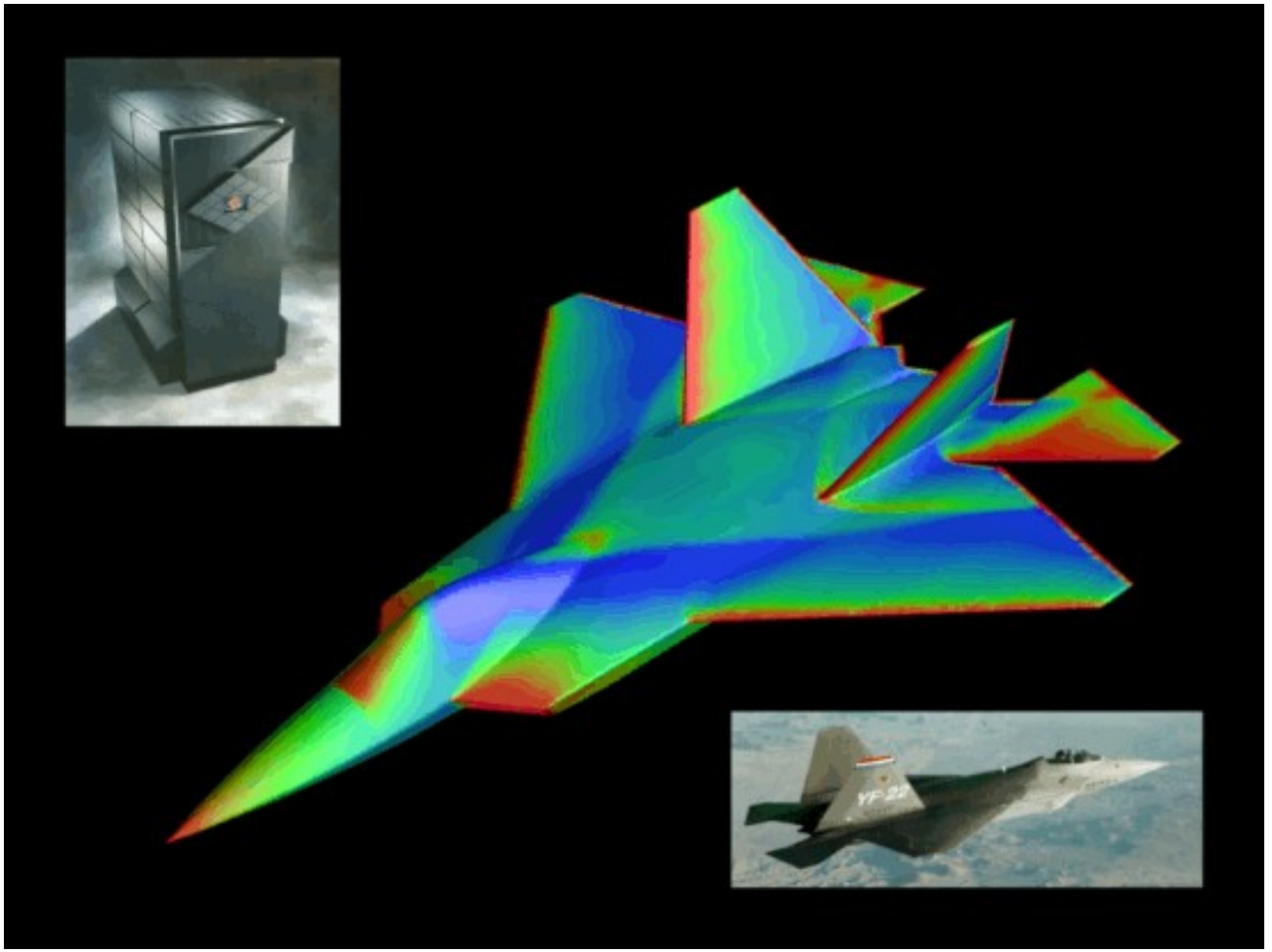
Aproximação no Tempo

↓

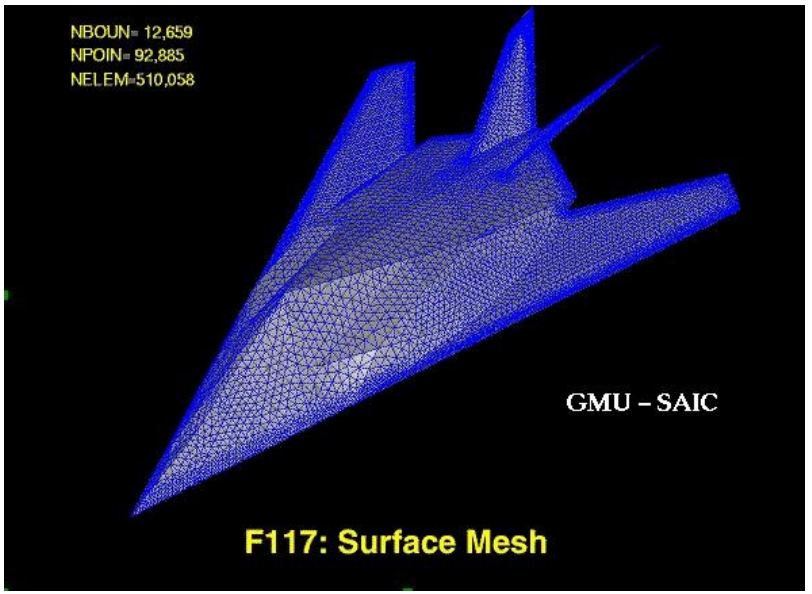
Solução do Sistema Linear em cada tempo

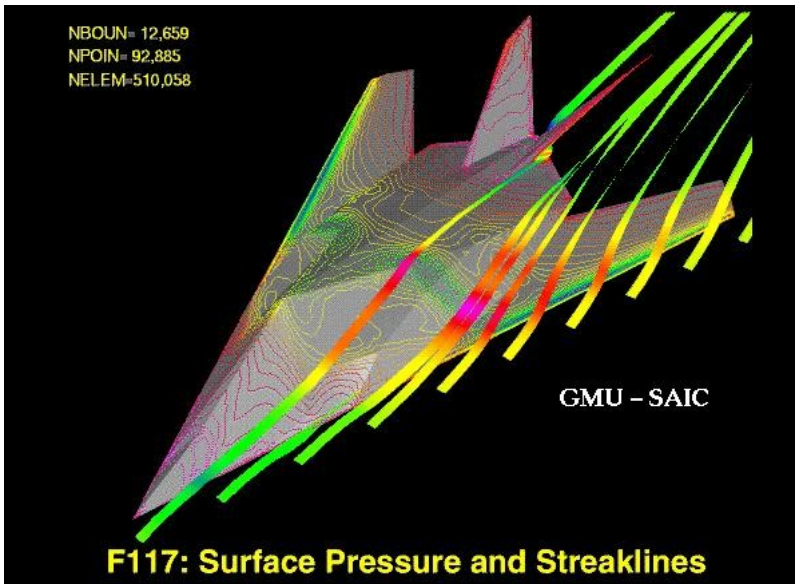
Exemplo de Aplicação: Um F18 Hornet no momento da quebra da barreira do som

Exemplo de Aplicação: Supersonic flow past a fighter aircraft at M=2.0

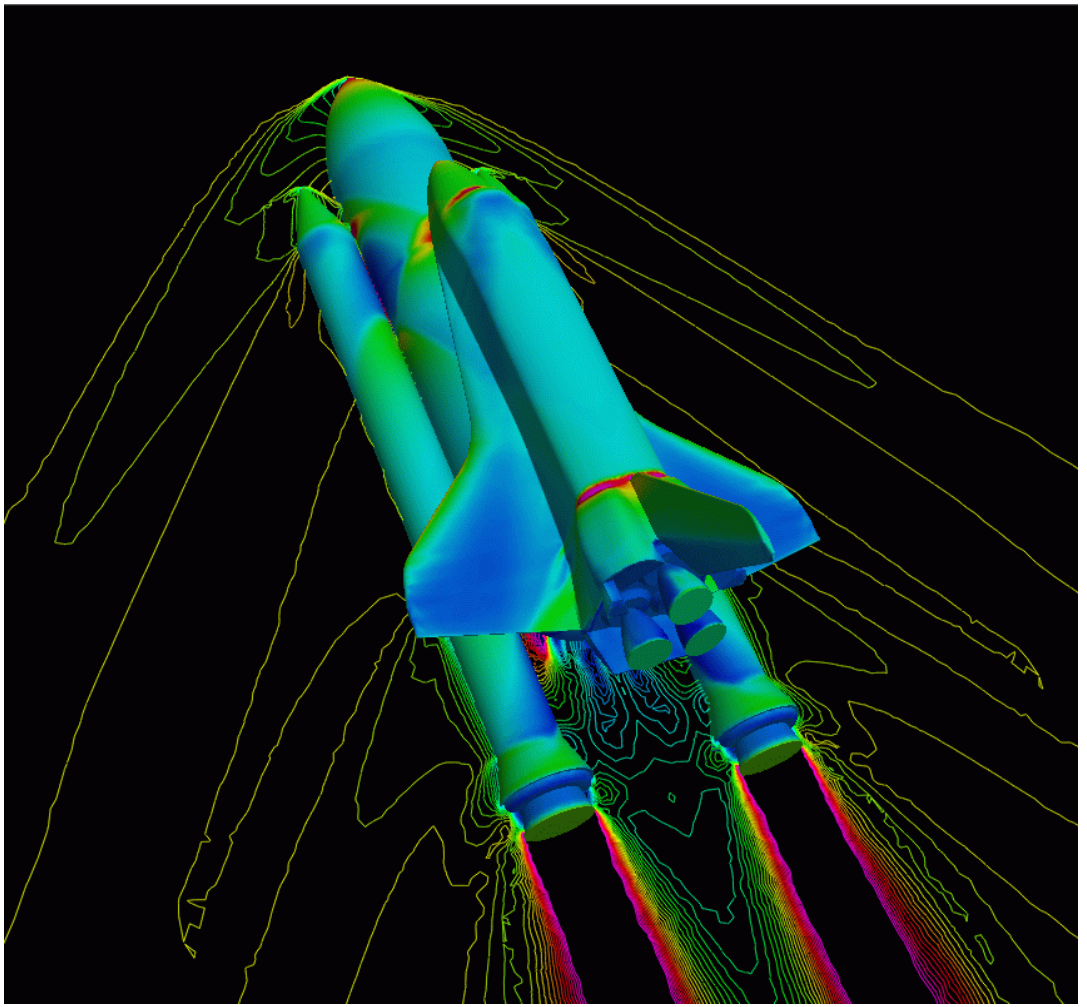


Exemplo de Aplicação: Simulação de um F117 em condições de vôo





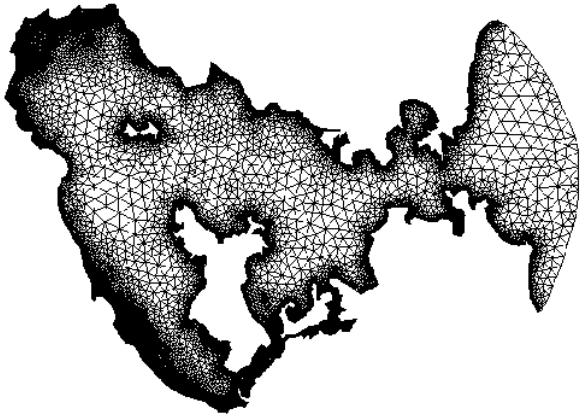
Exemplo de Aplicação: Simulação de escoamento compressível no Space-Shuttle

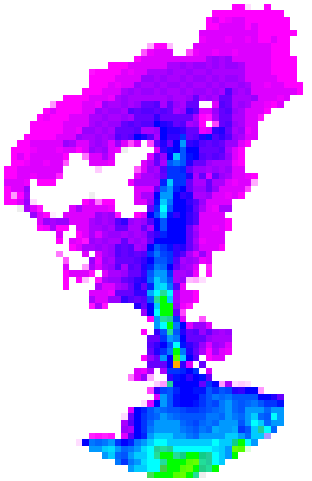


Exemplo do Processo de Solução (elementos finitos)

Domínio Real

Domínio Discretizado





Solução Aproximada

Dispersão de Poluentes na Baía de Guanabara

Problemas Benchmarks: Escoamento em uma Cavidade

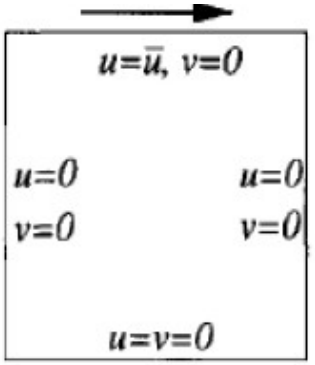
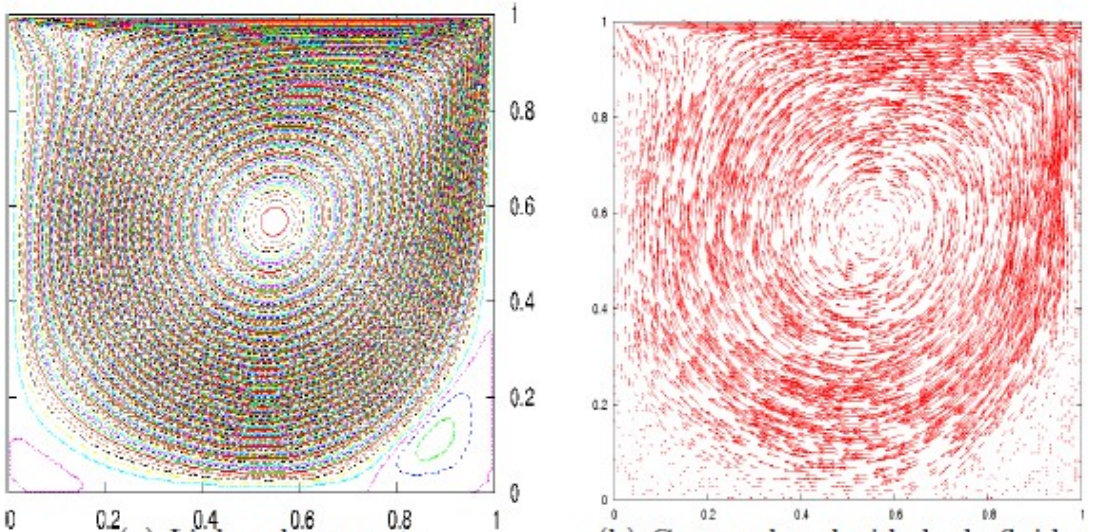


Figura 10: Escoamento em uma cavidade.



(a) Linhas de corrente (b) Campo de velocidade do fluido

Figura 11: Escoamento em uma cavidade para $Re = 1000$ em estado estacionário.

Problemas Benchmarks: Escoamento sobre um degrau

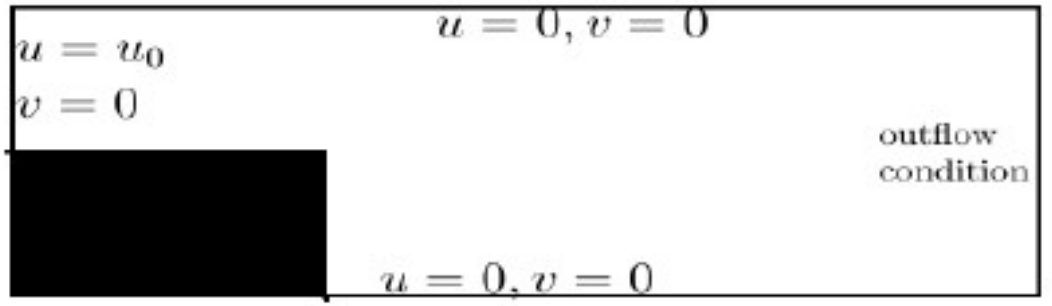
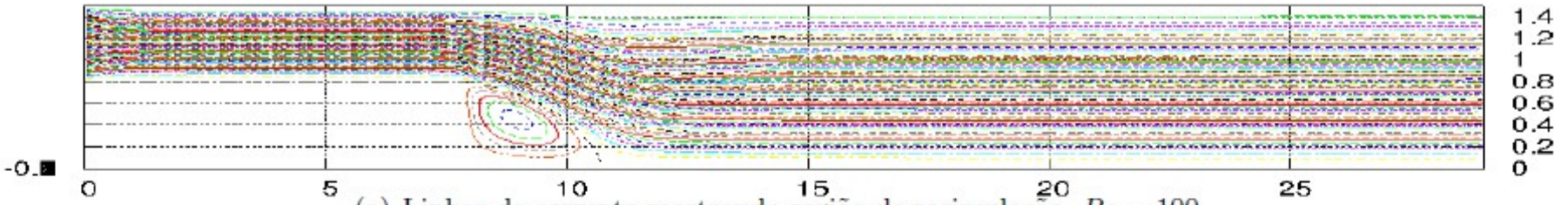
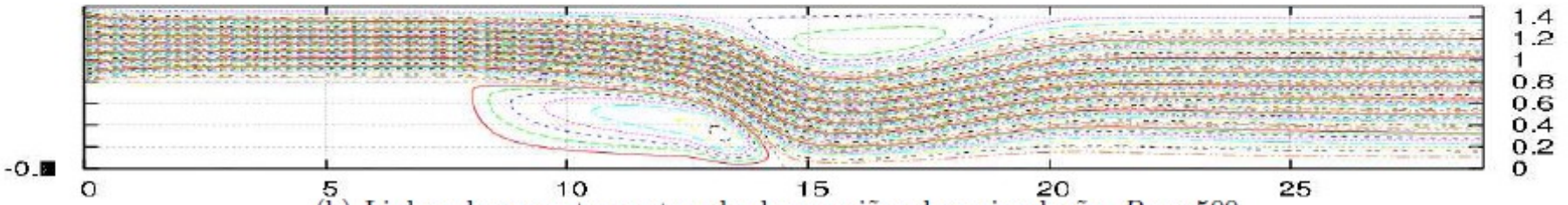


Figura 12: Escoamento sobre um degrau



(a) Linhas de corrente mostrando região de recirculação, $Re = 100$



(b) Linhas de corrente mostrando duas regiões de recirculação, $Re = 500$

Figura 13: Escoamento sobre um de degrau para $Re = 100$ e $Re = 500$

Problemas Benchmarks: Escoamento em torno de um disco

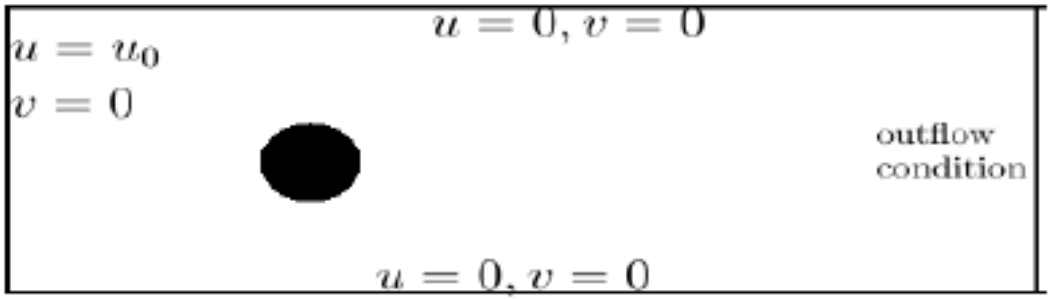
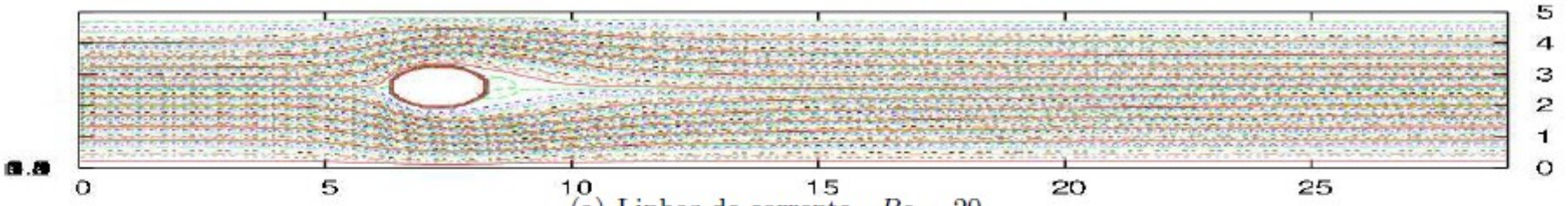
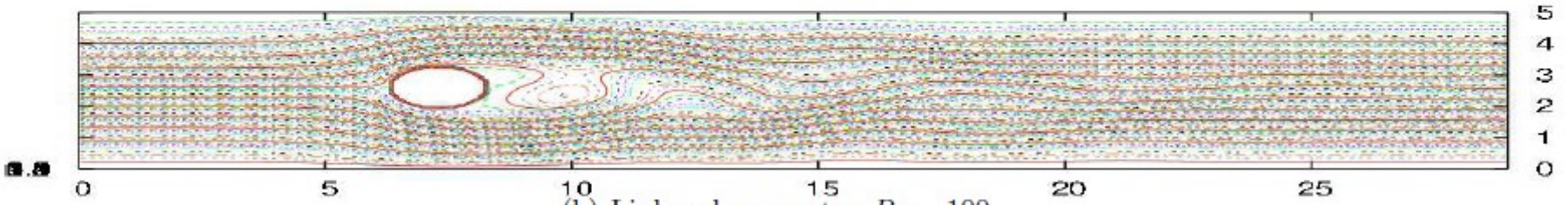


Figura 14: Escoamento em torno de um disco



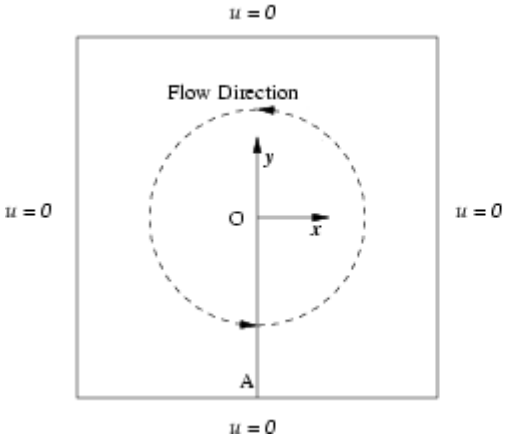
(a) Linhas de corrente , $Re = 20$

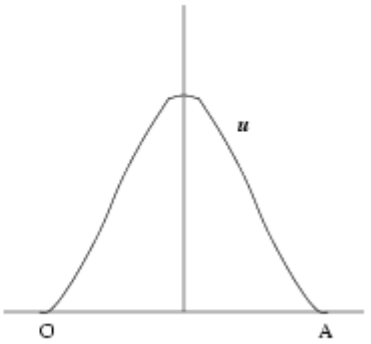


(b) Linhas de corrente , $Re = 100$

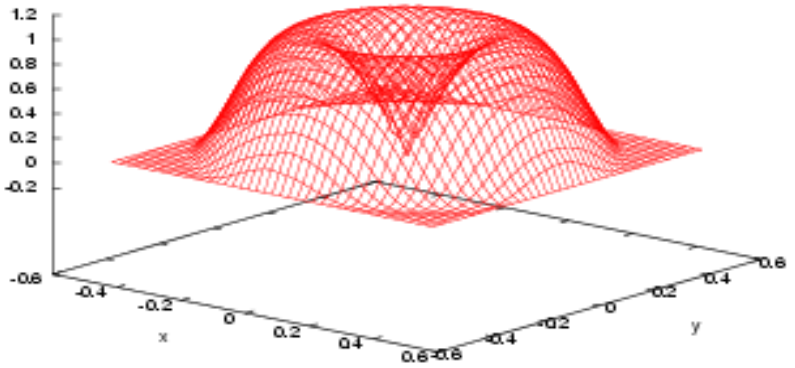
Figura 15: Escoamento em torno de um disco para $Re = 20$ e $Re = 100$

Problemas Benchmarks: Escoamento de uma elevação senoidal em rotação

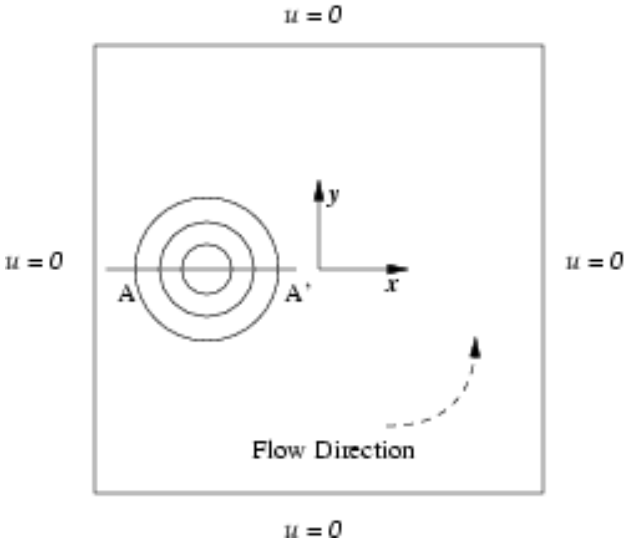


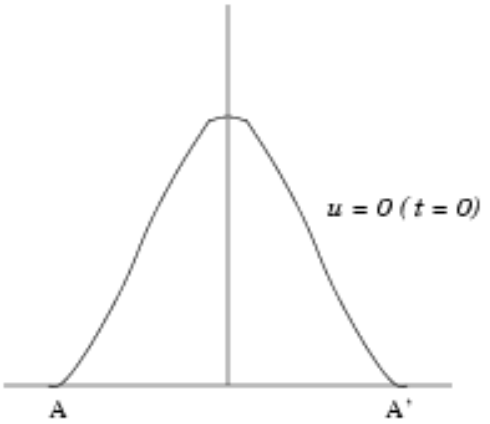


- $\beta = [-y, x]^T$
- $\kappa_x = \kappa_y = 10^{-6}$
- $tol_{GMRES} = 10^{-6}$

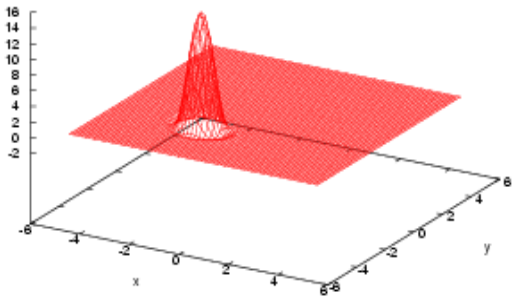


Problemas Benchmarks: Problema do cone em rotação (1)

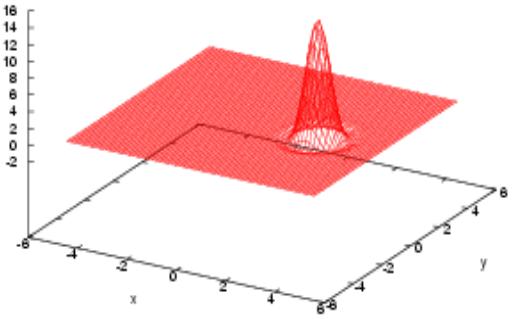




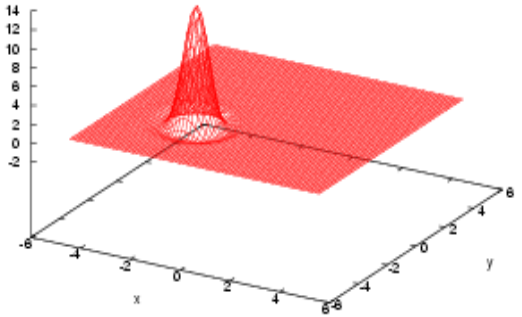
- $\beta = [-y, x]^T$
- $\kappa_x = \kappa_y = 10^{-6}$
- $tol_{GMRES} = 10^{-6}$



t = 1 *sec*

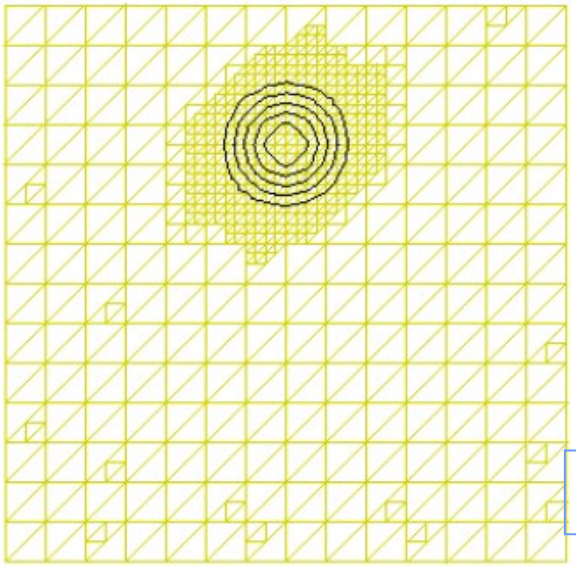


t = 3 *sec*

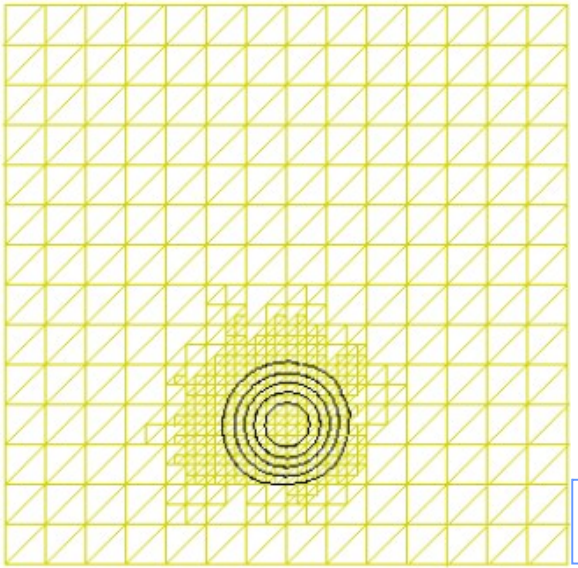


t = 7 *sec*

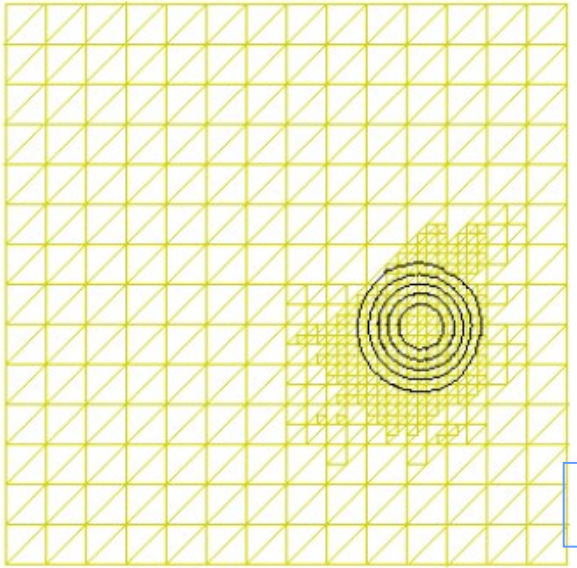
Problemas Benchmarks: Problema do cone em rotação (2)



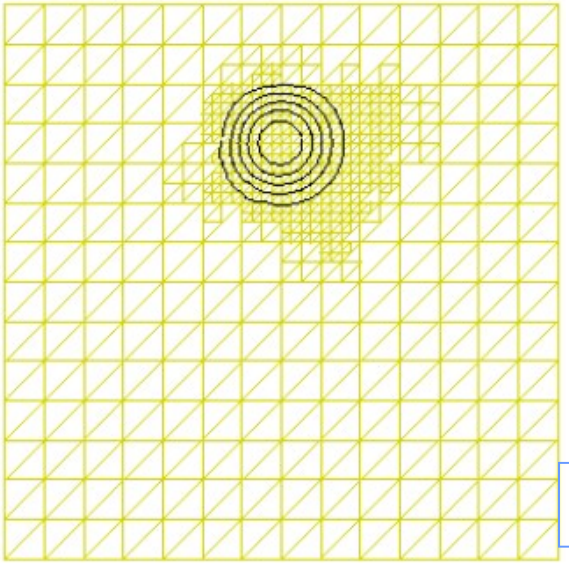
t = 0,0



t = 3,14

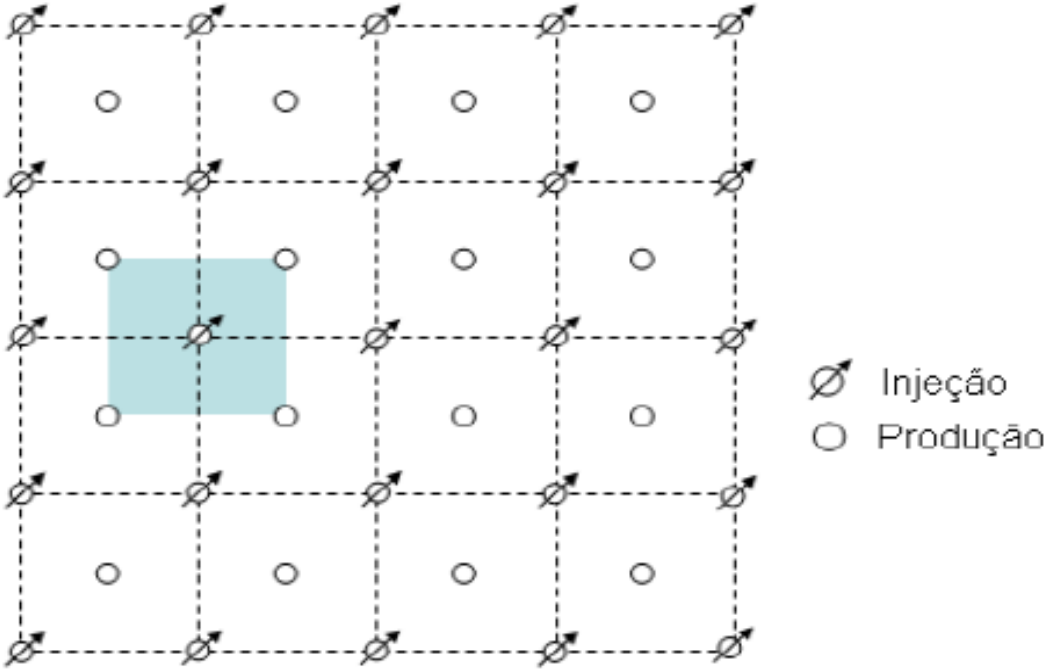


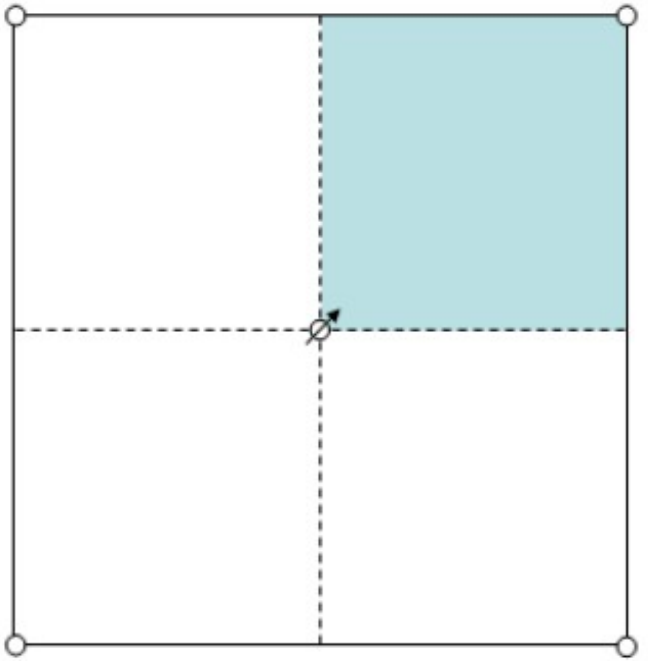
t = 4,40



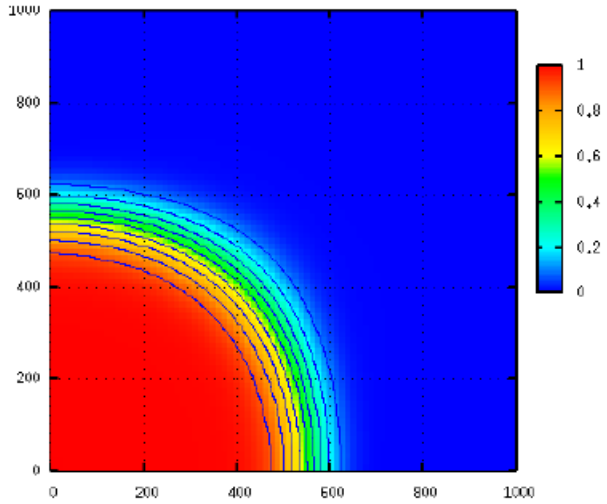
t = 8,29

Problemas Benchmarks: Problema dos 5 poços

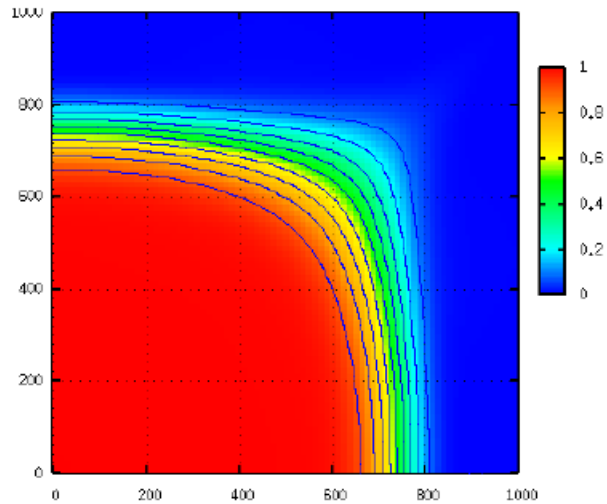




Problemas Benchmarks: Problema dos 5 poços (curvas da concentração)

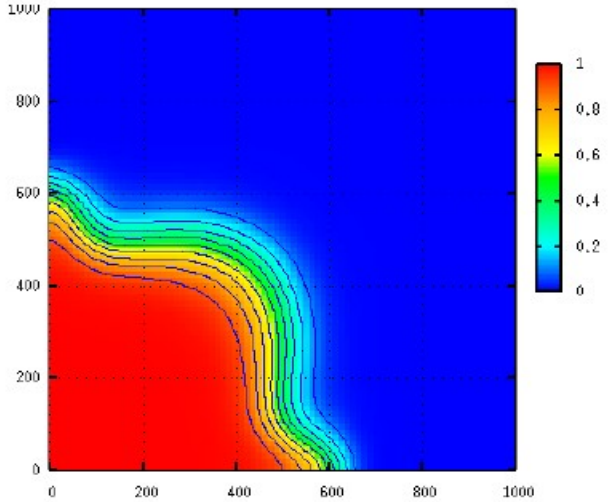


(b) 500 dias

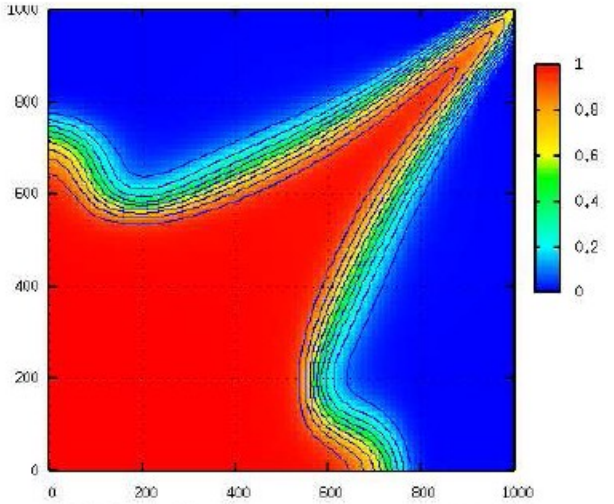


(d) 1000 dias

Razão de Mobilidade unitária



(b) Pós-Processamento - 500 dias



(d) Pós-Processamento - 1000 dias

Razão de Mobilidade adversa

Capítulo I - Um breve estudo sobre Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aspectos Gerais - Definição

- CFD (Computational Fluid Dynamics) ou DFC (Dinâmica dos Fluidos Computacional)
  - Área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor.
  - Exemplos:
    - Movimento de fluidos ao redor de um avião (ou submarino), dentro de tubulações, em meios porosos.
  - Interesse:
    - Obter distribuições de velocidades, pressões e temperatura na região do escoamento.

Aspectos Gerais - História

- Atividade que vem sendo desenvolvida há muitos séculos
- Exemplos:
  - Egípcios: relógio de água
  - Aristóteles: princípio da continuidade
  - Arquimedes: condições para que um corpo, quando mergulhado em um fluido, flutuasse ou não
  - Romanos: arquedutos
  - Leonardo da Vinci (sec. XV): formas que reduziam o arrasto de barcos sobre a água
  - Simon Stevin (sec. XVI): publicou um tratado matemático denominado “Estática e Hidrostática”
- Característica: experimental e matemática

Aspectos Gerais - História

- Leonard Euler: um dos fundadores da hidrodinâmica (deduziu equações de movimentos dos fluidos) -> Equações de Euler
- Descrição matemática completa -> Equações de Navier-Stokes (sec. XIX) descritas pelos trabalhos de Claude Navier (1822), Simeon Poisson (1829) e George Stokes (1845)

Aspectos Gerais
Equações de Navier-Stokes

Escoamentos incompressíveis e isotérmicos bidimensionais:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Equação de Continuidade: princípio físico da conservação de massa

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}=-1/\rho\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial uv}{\partial x}=-1/\rho\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Equações de Momento: aplicação da lei de Newton (F =m.a)

u,v : velocidades nas direções x e y, respectivamente

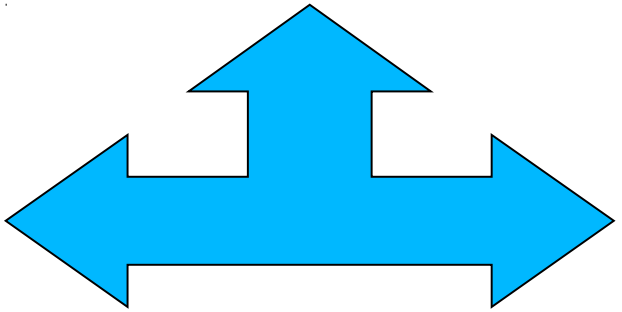
ρ : densidade

p : pressão

ν : viscosidade

Aspectos Gerais – Técnicas de Solução

Técnicas Experimentais



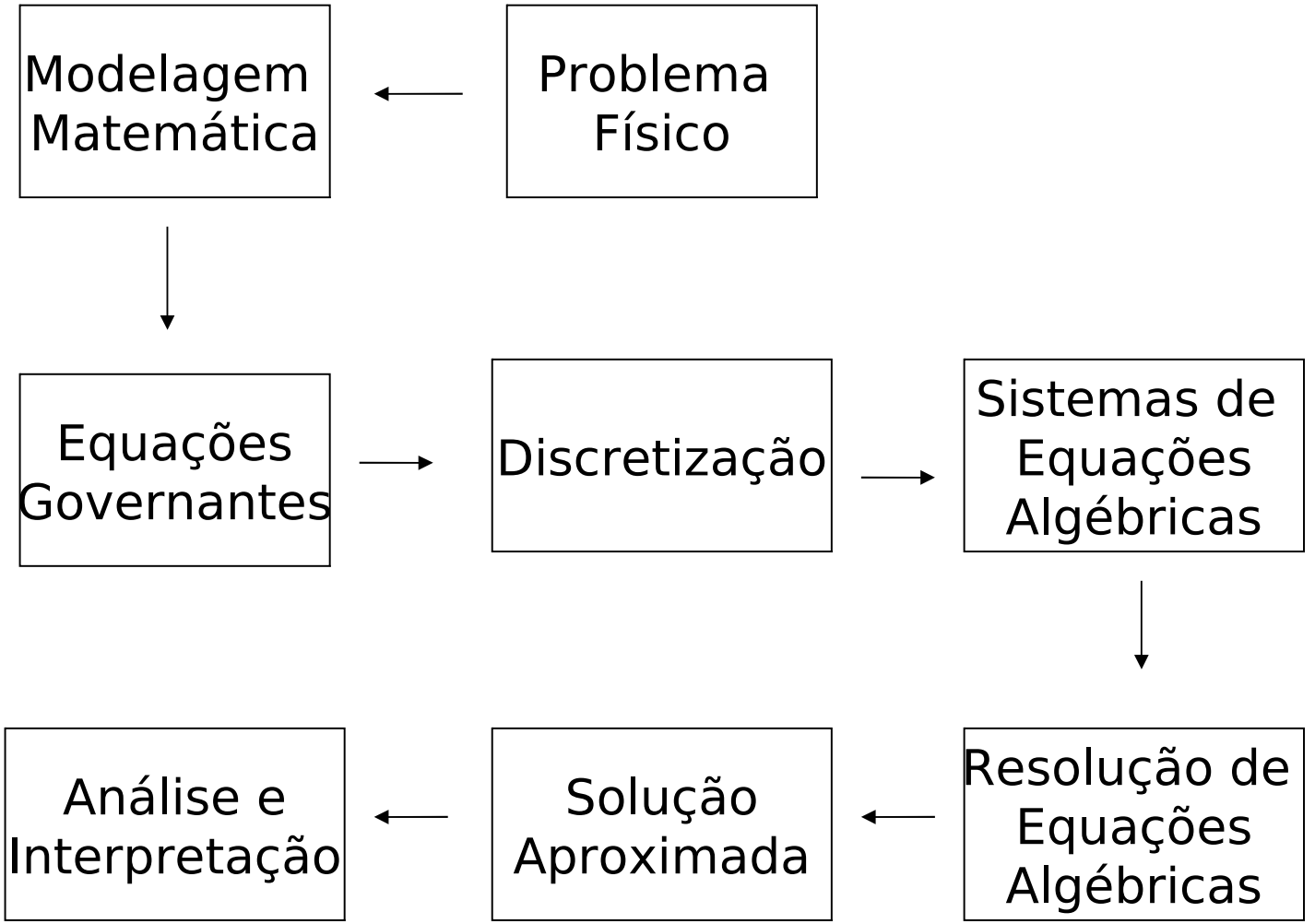
Técnicas Numéricas

Técnicas Teóricas

Aspectos Gerais – Técnicas de Solução

Técnica	Vantagens	Desvantagens
Experimental	mais realista	Equipamento exigido, Problema de escala Dificuldade de medição, Custo operacional
Teórica	mais geral Fórmula fechada	Restrita a geometria e processos físicos simples Geralmente restrita a problemas lineares
Numérica	Não há restrição à linearidade Geometrias e processos complicados Evolução temporal do processo	Erros de truncamento Prescrição das condições de contorno apropriadas Custos computacionais

Etapas para ums solução numérica



Equações Diferenciais Parciais (EDP)

- Classificação matemática:
  - Parabólicas
  - Hiperbólicas
  - Elípticas
- Classificação Física:
  - Problemas de equilíbrio (não evoluem com o tempo
  - Problemas de propagação (evoluem com o tempo) ou transientes

Classificação Matemática

$$A\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+D\frac{\partial\phi}{\partial x}+E\frac{\partial\phi}{\partial y}+F\phi=H$$

Elíptica se B^2-4AC < 0 (e.g. Laplace);

Parabólica se B^2-4AC = 0 (e.g. Calor);

Hiperbólica se B^2-4AC > 0 (e.g. Ondas);

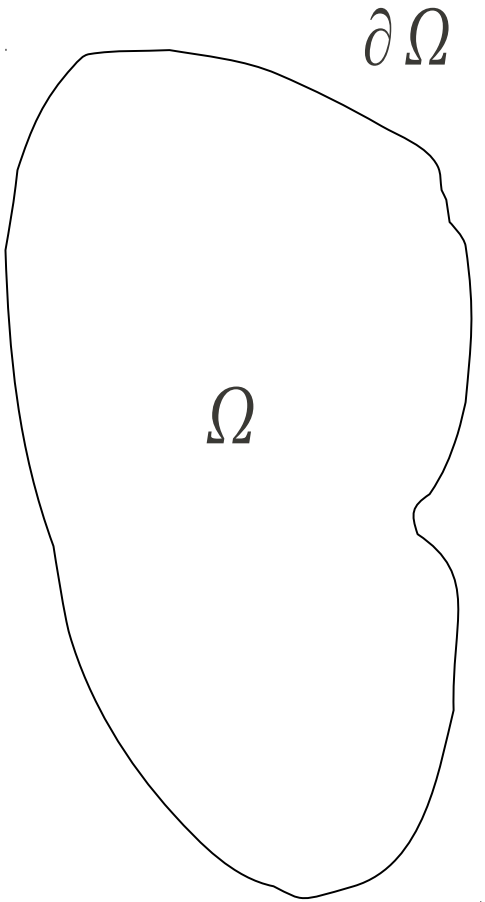
EDP – Problemas de Equilíbrio

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) não se altera com o passar do tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais elípticas
- O domínio de interesse é fechado
- A solução em qualquer ponto no interior do domínio depende das condições em todos os pontos do contorno
- Pertubações se deslocam em todas as direções
- Equação modelo: *equação de Laplace*

EDP – Equação de Laplace / Equação de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x, y)$$

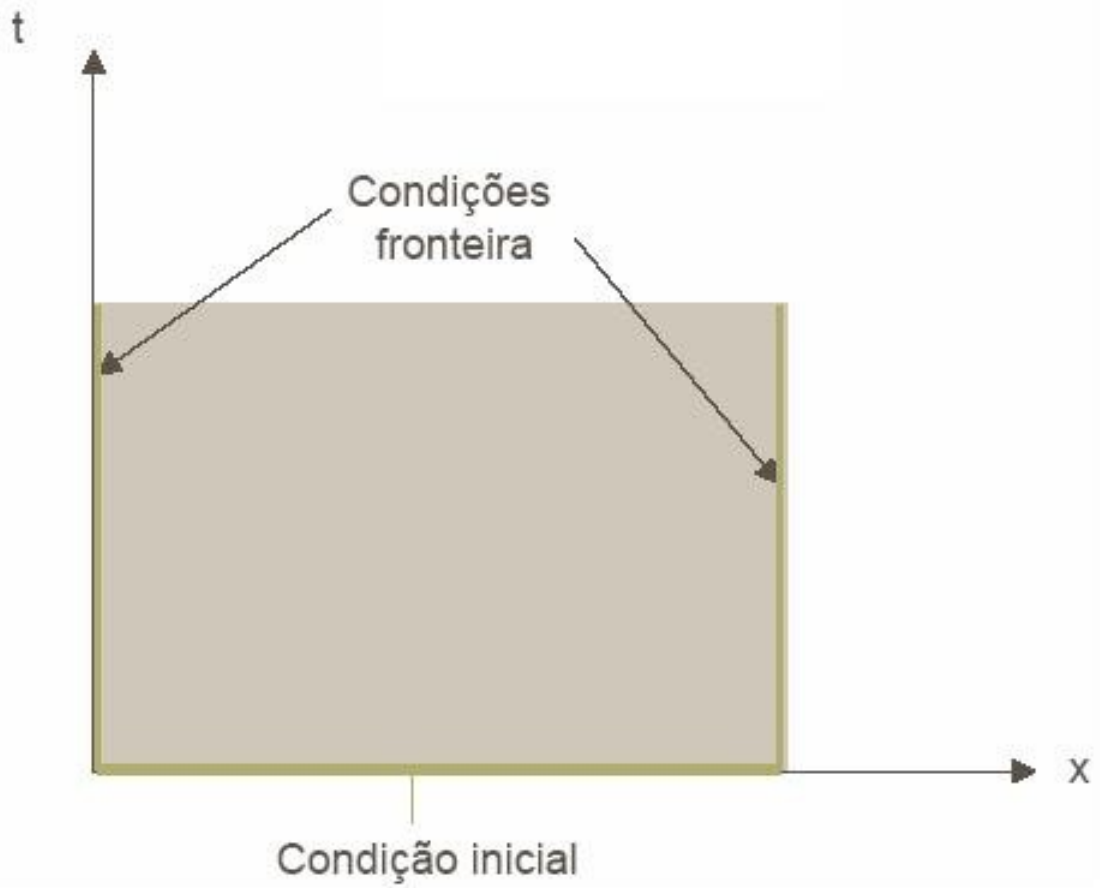


Solução única <-> condições de contorno

EDP – Problemas Transientes

- Propriedade de interesse (pressão, velocidade, temperatura, etc ...) variam com o tempo
- Matematicamente representados por equações diferenciais hiperbólicas ou parabólicas
- O domínio de interesse é aberto
- Conhecidos como problema de valor incial
- As condições de contorno são conhecidas em todo instante de tempo
- A solução é calculada partindo da suposição dos dados iniciais satisfazendo as condições de contorno

EDP – Problemas Transientes



$$t_0+\Delta t, t_0+2\Delta t, t_0+3\Delta t, \cdots, t_f-\Delta t, t_f$$

Condições Iniciais e de Fronteira

- Uma equação diferencial tem uma infinidade de soluções. Um problem é dito bem posto qunado envolve:
  - um conjunto de equações diferenciais;
  - o domínio espacial e temporal onde se deseja obter a solução;
  - Um conjunto de condições iniciais e de contorno

Equação Parabólica - Problema bem posto

Exemplo

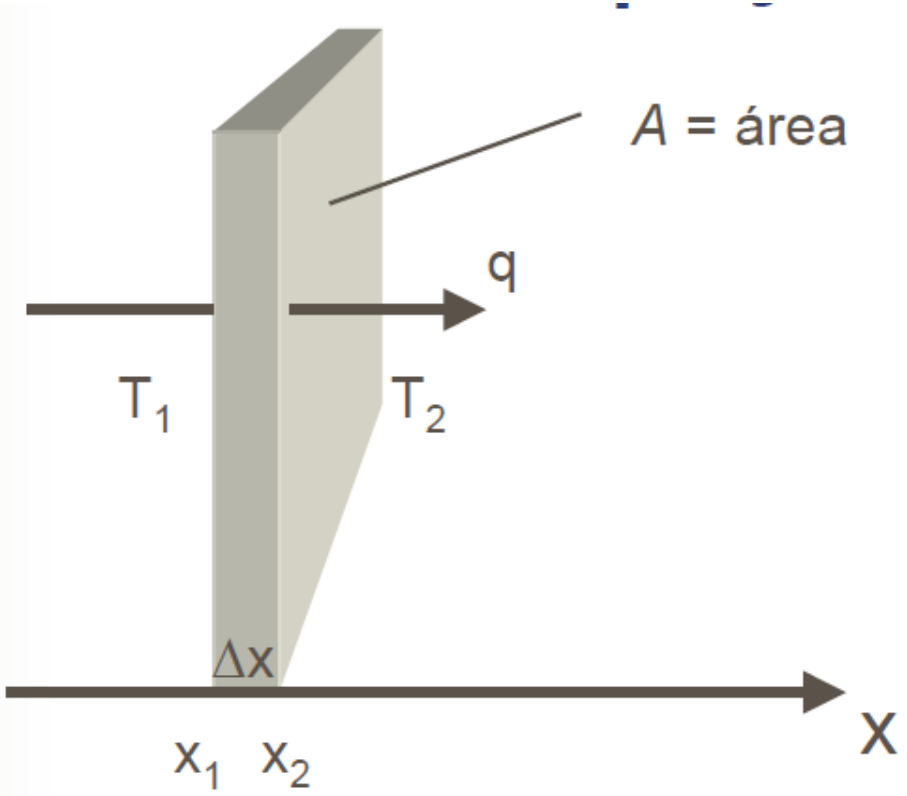
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f$$

Exemplo de um problema bem posto.

Dados *f* e *g*, determinar u(x,y,t), tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f, & \text{no interior do domínio} \\ u(x,y,t) = g(x,y,t), & \text{na fronteira do domínio} \\ u(x,y,0) = h(x,y), & \text{no interior do domínio} \end{cases}$$

Equação Parabólica – Equação do Calor



T = temperatura

q = fluxo de calor $q = -K \frac{\partial T}{\partial x}$

Δt = incremento de tempo

c = calor específico
K = conductividade térmica
$\kappa = K/(\rho c)$ difusividade térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Variação da energia = entrada – saída

$\Delta T(\rho V)\, c = A\, \Delta t\, [q(x_1) - q(x_2)] = -A\, \Delta t\, \Delta q$

$\Delta T\, (\rho\, A\, \Delta x)\, c = -A\, \Delta t\, [cq/cx\, \Delta x]$

$\Delta T\, (\rho\, A\, \Delta x)\, c = A\, \Delta t\, K\, [c^2T/cx^2\, \Delta x]$

$\Delta T / \Delta t\, (\rho c/K) = c^2T/cx^2$