Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - UFES/CT
Disciplina: Computação Científica - 13/1
Exercício Computacional 1 - Aplicações de Problemas de Valor no Contorno

Objetivo

O objetivo deste exercício é implementar pelo método das diferenças finitas problemas unidimensionais de valor no contorno considerando condições de contorno de valor prescrito, fluxo prescrito e mista. O problema de valor no contorno (PVC) unidimensional pode ser definido por:

Dadas as funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ contínuas em (a, b), encontrar $u(x)$ tal que

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = r(x) \qquad a < x < b \tag{1}$$

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{array}{rcl} u(a) = u_a & u(b) = u_b & ou \\ \dfrac{du(a)}{dx} = \sigma_a & \frac{du(b)}{dx} = \sigma_b & ou \\ \alpha_a \dfrac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) = \gamma_a & \alpha_b \frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) = \gamma_b & \end{array}$$

onde u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b são constantes conhecidas do problema.

Implemente em MatLab ou Octave uma função que receba como parâmetros de entrada:

- o domínio do problema, definido pelos limites do intervalo (a, b);
- o número de incognitas, n;
- os parâmetros que definem as condições de contorno: u_a, u_b, σ_a, σ_b, α_a, β_a, α_b, β_b, γ_a e γ_b;

e retorne o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ e o vetor de aproximações $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ pelo método das diferenças finitas considerando aproximações de segunda ordem para as derivadas na equação diferencial e de primeira para o tratamento das condições de contorno. As funções $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ devem ser definidas como funções de apoio e serão específicas para cada aplicação.

Aplicações

Conservação de Calor em uma haste longa e fina

A conservação de calor em uma haste longa e fina (conforme Figura 1), considerando que a haste não esteja isolada e que o sistema esteja em estado estacionário, pode ser modelada pelo PVC:

$$\begin{aligned} \frac{d^2T}{dx^2} + K(T_a - T) &= 0 \text{ em } (0, L) \\ T(0) &= T_1 \\ T(L) &= T_2 \end{aligned}$$

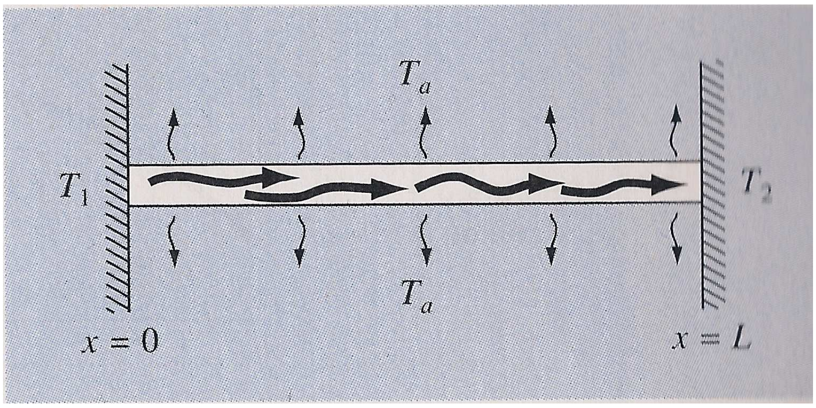

Figura 1: Geometria da haste longa e fina

onde K representa o coeficiente de transferência de calor que paramatriza as taxas de dissipação de calor para o ar (m^{-2}) e T_a é a temperatura do ar em torno da haste (^0C).

Considerando $T(0) = 40^0C$, $T(10) = 200^0C$, $K = 0.01\ m^{-2}$ e $T_a = 20\ ^0C$, obtenha a distribuição da temperatura no interior do intervalo $(0, 10)$, considerando $n = 10, 50, 100$. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.

Distribuição de temperatura em uma haste circular

Encontre a distribuição de temperatura em uma haste circular com fonte interna de calor S, satisfazendo ao PVC:

$$\begin{aligned} \frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} + S &= 0 \text{ para } r \in (0,1) \\ \frac{dT(0)}{dr} &= 0 \\ T(1) &= 1 \end{aligned}$$

Considerando $n = 50$, $S = 1, 10,$ e $, 20\ k/m^2$, obtenha a distribuição de temperatura para os três valores de fonte interna. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.

Resfriador unidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. 2. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor na direção unidimensional x é dado pela Eq. (2). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em (*), disponível na página do curso.

$$-\frac{d}{dx}\left(K\frac{du(x)}{dx}\right) + Cu(x) = f(x) \qquad 0 < x < L \tag{2}$$

*R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003

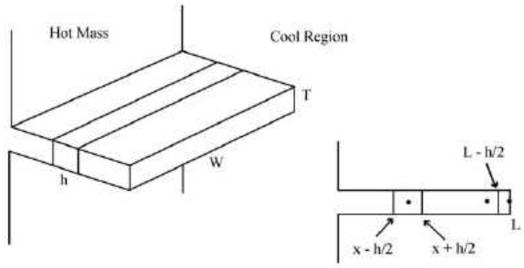

Figura 2: Geometria do Resfriador

com condições de contorno do tipo:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ c_{ref}u(L) + K\frac{du(L)}{dx} &= c_{ref}u_{ref} \end{aligned}$$

onde K é a condutividade térmica, u_{ref} é uma temperatura de referência, u_0 é a temperatura inicial da massa e c_{ref} é a abilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante C e o termo fonte f são funções da geometria do resfriador (observe a Fig. 2), dadas por:

$$\begin{aligned} C &\equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW}\right) c_{ref} \\ f &\equiv Cu_{ref} \end{aligned}$$

onde a temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente c_{ref}, por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

Considerando $n = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ encontre a solução aproximada para os diferentes coeficientes c_{ref}. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.