UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
Lista de Exercícios - Programação Linear

1. Seja o conjunto C de soluções viáveis definido por $Ax = b$ e $x \geq 0$. Mostre que o ponto x̂ é um vértice de C se e somente se os vetores a_j correspondentes às componentes positivas de $\hat{x}_j$ são linearmente independentes.

2. Seja C^* o conjunto das soluções ótimas de um PPL (Problema de Programação Linear). Prove que C^* é um conjunto convexo.

3. Se um PPL possui mais de 1 (uma) solução ótima então possuirá uma infinidade de soluções ótimas.

4. Justificar que se x̂ é vértice de C, ele não poderá ser escrito como uma combinação linear convexa legítima de 2 ou mais pontos distintos do conjunto C.
   Obs: basta considerar 2 pontos distintos.

5. Considere o PPL abaixo:

$$\begin{array}{rcrcl} \text{máx } z_0 & = & 5x_1 & + & 5x_2 \quad \text{sujeito a} \\ x_1 & & & \leq & 2 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   (a) Indicar graficamente a solução gráfica.
   (b) Escreva o PPL acima na Forma-Padrão.
   (c) Anular as variáveis, $x_1, x_2, \ldots, x_5$, 2 a 2, de modo a caracterizar todos os vértices de C.
       Exemplo: $x_1 = x_2 = 0$ caracteriza a origem $(0, 0)$.

6. Considerando ainda o PPL do exercício anterior, verifique se as afirmações abaixo estão certas ou erradas. Justique sua resposta.

   (a) O conjunto C das soluções viáveis é limitado.
   (b) Existem apenas 2 soluções ótimas.

(c) Existe uma infinidade de soluções ótimas.

7. Considere o PPL abaixo:

$$\begin{array}{rcrcrl} \text{máx } z_0 & = & 2x_1 & + & 3x_2 & \text{sujeito a} \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 & \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 6 & \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 9 & \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

(a) Achar graficamente a solução.

(b) Resolver pelo Método Simplex, e a cada iteração, identificar o vértice correspondente no plano.

8. Seja um PPL cujo conjunto C é limitado e possui mais de uma solução ótima. Demonstrar que ao menos 2 das soluções ótimas são vértices. Obs: utilizar o fato de C ser limitado, isto é, $\|x_1 - x_2\| \leq K$, onde $K > 0$ é uma constante.

9. A fabricação de 3 produtos envolve 3 tipode de operação. O tempo em cada uma delas, por unidade de produto (em minutos), a quantidade total de tempo disponível na fábrica para cada operação (em min/dia), bem como o lucro líquido por unidade de porduto são dados na tabela abaixo:

	tempo por unidade de produto			
operação	produto 1	produto 2	produto 3	tempo disponível
1	1	2	1	430
2	3	0	2	460
3	1	4	0	420
lucro unitário	3	2	5	

Determinar a produção diária de cada produto com o objetivo de maximizar o lucro, sabendo-se que toda produção será vendida. Modelar como um PPL e resolver pelo Simplex.

10. Mostre que para x_s substituir x_r na base, isto é, $(x_1, \ldots x_r, \ldots, x_m)$ se tornar $(x_1, \ldots x_s, \ldots, x_m)$, é possível quando o coeficiente $a_{rs} \neq 0$.

11. Se um sistema de m equações de n não-negativas incógnitas (variáveis) possuir uma solução básica viável então a solução existe na qual k variáveis são estritamente maiores que zero e $n-k$ são nulas, onde $k \leq min(m,n)$. Supor o caso onde $m < n$. Essa afirmativa é falsa ou verdadeira. Justifique sua resposta.

12. Considere o PPL mín $f(x) = cx$, sujeito a $Ax = b$, $x > 0$. Se for adicionado mais uma restrição, se x^* (ótimo) existe, o que pode acontecer a ele? Construa exemplos para ilustrar sua resposta.

13. Seja o critério de melhoria no qual se baseia o SIMPLEX, isto é, máx $(z_j - c_j) > 0$, $\forall j \in J$. Proponha outro critério de melhoria. Construa um exemplo, aplique o Simplex com os dois critérios e faça um paralelo entre eles.

14. Considere o PPL abaixo:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \text{máx } z_0 & = & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.a. & & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ & & 2x_1 & + & 4x_2 & \geq & 4 \\ & & x_1 & e & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Resolva pelo Método de 2 Fases.

15. Qual a utilidade da introdução da primeira fase do simplex? Para auxiliar sua resposta, utilize um exemplo gráfico.

16. Ao final da primeira fase do método 2 fases, quando podemos concluir que o PPL não tem solução? Justifique sua resposta.

17. No momento em que uma variável artificial x_i^a sai da base podemos retirá-la do quadro simplex? Justificar sua resposta com um exemplo gráfico.