

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
Lista de Exercícios - Programação Linear

1. Seja o conjunto C de soluções viáveis definido por $Ax = b$ e $x \geq 0$. Mostre que o ponto \hat{x} é um vértice de C se e somente se os vetores a_j correspondentes às componentes positivas de \hat{x}_j são linearmente independentes.
2. Seja C^* o conjunto das soluções ótimas de um PPL (Problema de Programação Linear). Prove que C^* é um conjunto convexo.
3. Se um PPL possui mais de 1 (uma) solução ótima então possuirá uma infinidade de soluções ótimas.
4. Justificar que se \hat{x} é vértice de C , ele não poderá ser escrito como uma combinação linear convexa legítima de 2 ou mais pontos distintos do conjunto C .
Obs: basta considerar 2 pontos distintos.
5. Se a função objetivo assume o máximo (ou mínimo em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação linear convexa desses pontos extremos.
6. Considere o PPL abaixo:

$$\begin{aligned} \text{máx } z_0 &= 5x_1 + 5x_2 && \text{sujeito a} \\ x_1 &&& \leq 2 \\ x_1 + x_2 &&& \leq 4 \\ -x_1 + x_2 &&& \leq 1 \\ x_1, x_2 &&& \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Indicar graficamente a solução gráfica.
- (b) Escreva o PPL acima na Forma-Padrão.
- (c) Anular as variáveis, x_1, x_2, \dots, x_5 , 2 a 2, de modo a caracterizar todos os vértices de C .
Exemplo: $x_1 = x_2 = 0$ caracteriza a origem $(0, 0)$. Lembrar da aula onde fizemos a caracterização dos vértices do conjunto.

7. Considerando ainda o PPL do exercício anterior, verifique se as afirmações abaixo estão certas ou erradas. Justique sua resposta.
- (a) O conjunto C das soluções viáveis é limitado.
 - (b) Existem apenas 2 soluções ótimas.
 - (c) Existe uma infinidade de soluções ótimas.
8. Considere o PPL abaixo:

$$\begin{aligned} \text{máx } z_0 &= 2x_1 + 3x_2 && \text{sujeito a} \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Achar graficamente a solução.
 - (b) Resolver pelo Método Simplex, e a cada iteração, identificar o vértice correspondente no plano.
9. O que pode acontecer se houver empate na escolha da variável que entrará na base?
10. O que pode acontecer se houver empate na escolha da variável que sairá na base?
11. Considere que chegando ao ótimo de um PPL utilizando o Método Simplex, existe um (ou mais) $j \in J$ tal que $(z_j - c_j) = 0$. O que podemos dizer sobre o tipo de solução? Justifique sua resposta. Lembrar que I é o conjunto de índices básicos e J é o conjunto de índices não-básicos.
12. Considere que esteja utilizando o Método Simplex para resolver um PPL e é detectado que para algum $j \in J$ tem-se $y_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in I$. O que se pode concluir? Justifique sua resposta.
13. Seja um PPL cujo conjunto C é limitado e possui mais de uma solução ótima. Demonstrar que ao menos 2 das soluções ótimas são vértices. Obs: utilizar o fato de C ser limitado, isto é, para quaisquer x_1 e $x_2 \in C$ temos $\|x_1 - x_2\| \leq K$, onde $K > 0$ é uma constante. Lembrar que um ponto de C pode ser escrito como combinação linear convexa de 2 pontos onde 1 é vértice.

14. Mostre que para x_s substituir x_r na base, isto é, $(x_1, \dots, x_r, \dots, x_m)$ se tornar $(x_1, \dots, x_s, \dots, x_m)$, é possível quando o coeficiente $a_{rs} \neq 0$.
15. Se um sistema de m equações de n não-negativas incógnitas (variáveis) possuir uma solução básica viável então a solução existe na qual k variáveis são estritamente maiores que zero e $n - k$ são nulas, onde $k \leq \min(m, n)$. Supor o caso onde $m < n$. Essa afirmativa é falsa ou verdadeira. Justifique sua resposta.
16. Considere o PPL mín $f(x) = cx$, sujeito a $Ax = b$, $x > 0$. Se for adicionado mais uma restrição, se x^* (ótimo) existe, o que pode acontecer a ele? Construa exemplos para ilustrar sua resposta.
17. Seja o critério de melhoria no qual se baseia o Simplex, isto é, máx $(z_j - c_j) > 0$, $\forall j \in J$. Proponha outro critério de melhoria. Construa um exemplo, aplique o Simplex com os dois critérios e faça um paralelo entre eles.