UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO TECNOLÓGICO - DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA
Programação Linear - Fase 1 do Algoritmo SIMPLEX

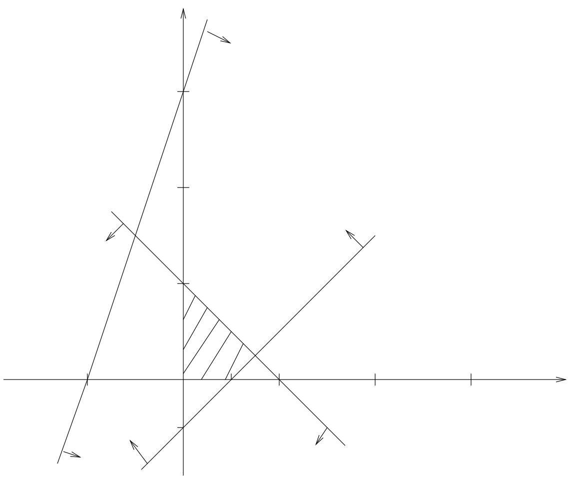
A determinação de uma solução básica inicial caracteriza a primeira fase do algoritmo Simplex.

Até agora, somos capazes de resolver o problema

$$\begin{aligned} \text{minimize f(x)} \\ \text{sujeito a:} Ax \leq b \\ x \leq 0 \end{aligned}$$

Não há necessidade da primeira fase porque as variáveis de folga já constituem uma base inicial B = I que determina a origem como solução inicial do método. Exemplo:

$$\begin{array}{rcrcr} \text{min f(x)} = -x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{sujeito a :} & & & & \\ 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & e & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

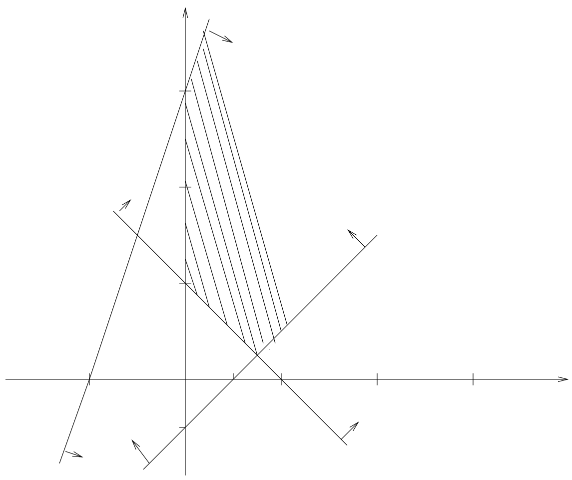


O quadro simplex abaixo mostra as 3 últimas colunas sendo as básicas, I = {3,4,5} e J = {1,2} as colunas não-básicas. O vértice caracterizado é o ponto x = (**0** **0** 1 1 3) (B=I com $z_i - c_i = 0 \;\; i \in I = \{3, 4, 5\}$)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$	0	1	-2	0	0	0
x_3	1	2	-2	1	0	0
x_4	1	1	1	0	1	0
x_5	3	-3	1	0	0	1

Um exemplo quando o conjunto de soluções viáveis não contém a origem. Reparem que este exemplo difere do anterior apenas na segunda restrição, modificando a região viável.

$$\begin{array}{rcrcl}
\min \text{f(x)} = -x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{sujeito a :} & & & & \\
2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\
x_1 & + & x_2 & \geq & 1 \\
-3x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
x_1 & e & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$



O quadro simplex abaixo mostra as colunas 3 e 5 sendo as colunas básicas, I = {3,5} e J = {1,2,4} as colunas não-básicas. Não há vértice caracterizado pois não há uma base B_{3x3}

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x)$		1	-2	0	0	0
x_3	1	2	-2	1	0	0
?	1	1	1	0	-1	0
x_5	3	-3	1	0	0	1

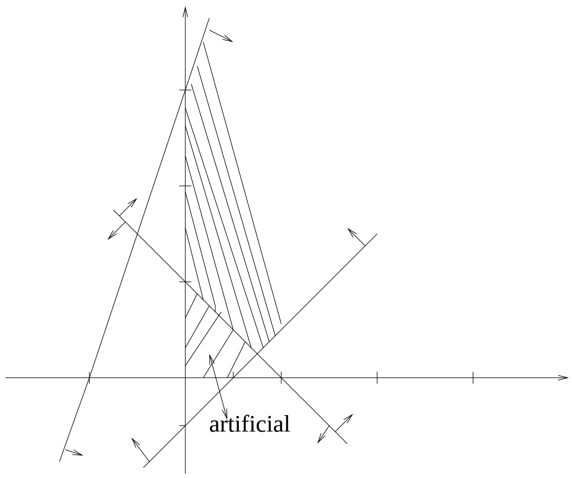
Devemos simular que a região que contém a origem pertença ao conjunto de soluções viáveis. Para isso, nada mais natural que incluirmos a região

$$x_1 + x_2 \leq 1.$$

Se estamos simulando, podemos dizer que esta região é artificial e está representada por $x_1^a \geq 0$ sendo esta restrição na forma padrão representada por

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_1^a = 1.$$

Neste caso, o gráfico do conjunto de soluções viáveis possui artificialmente a região que contém a origem.



É desejável que esta região artificial seja eliminada do conjunto. Como? Basta considerar a minimização de uma função objetivo $q = x_1^a$ com $x_a^1 \geq 0$. É fácil ver que o mínimo desta função é 0 significando $x_1^a = 0$. Vamos montar um novo quadro incluindo a nova função q e a variável artificial. Esta fará parte da base.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a
q		0	0	0	0	0	-1
$f(x)$		1	-2	0	0	0	0
x_3	1	2	-2	1	0	0	0
x_1^a	1	1	1	0	-1	0	1
x_5	3	-3	1	0	0	1	0

Notem que a coluna que elegemos ser básica não está na forma canônica como uma coluna básica dever ser (vide colunas 3 e 5). A coluna relativa a variável artificial não possui o custo reduzido $z_j - c_j = 0$. Para tanto, faz-se operações elementares envolvendo a linha de x_1^a e a linha da função objetivo q ($L_1 = L_1 + L_4$).

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a
q	1	1	1	0	-1	0	0
$f(x)$		1	-2	0	0	0	0
x_3	1	2	-2	1	0	0	0
x_1^a	1	1	1	0	-1	0	1
x_5	3	-3	1	0	0	1	0

Com o quadro da primeira fase preparado, fazendo uso da base formada pelas colunas 3, 5 e 6, inicia-se a minimização de q. O quadro seguinte será

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a
q	0	0	0	0	0	0	-1
$f(x)$	2	3	0	0	-2	0	2
x_3	3	4	0	1	-2	0	2
x_2	1	1	1	0	-1	0	1
x_5	2	-4	0	0	1	1	-1

Chegamos no ótimo da função artificial $q = 0$ com x_1^a fora da base valendo 0. Retiramos do quadro as linhas e colunas artificiais, ficando com uma base inicial estabelecida caracterizando o ponto x $= (\mathbf{0}\ \mathbf{1}\ 3\ 0\ 2)$. Este é um ponto do conjunto viável e, a partir daí, segue-se o Simplex naturalmente.

Se ao final da primeira fase não conseguimos fazer $q = 0$, isto significa que o conjunto de soluções viáveis é vazio. O que fazemos na primeira fase é justamente alcançar um dos vértices do conjunto de soluções viáveis. Partimos de uma "origem artificial" e caminhamos até um ponto verdadeiramente viável. Este caminho é dado pela eliminação das variáveis artificiais até $q = 0$. Se não conseguimos $q = 0$ implica que não existe ponto viável para alcançar.

Se ao final da primeira fase existir uma variável artificial na base com $q = 0$, basta retirar esta variável artificial com um simples pivoteamento.

O exemplo utilizado nesse resumo, utilizou apenas uma variável articiail x_a^1 porque havia apenas uma restrição do tipo $\geq$. O problema a seguir, deve utilizar 2 variaáveis articiais x_1^a e x_2^a com uma função objetivo artificial $q = x_1^a + x_2^a$. Para eliminar as variáveis artificiais, devemos tirá-la da base, uma a uma, até que todas sejam anuladas e a $q = 0$.

$$
\begin{array}{rcrcl}
\text{max f(x)} = 6x_1 & - & x_2 & & \\
\text{sujeito a :} & & & & \\
4x_1 & + & x_2 & \leq & 21 \\
2x_1 & + & 3x_2 & \geq & 13 \\
x_1 & - & x_2 & = & 3 \\
x_1 & e & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$