Laboratório de Pesquisa em Redes e Multimídia

# Introdução à Engenharia de Computação

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Informática

# Tópico: Sistemas de Numeração

**José Gonçalves - LPRM/DI/UFES**
***Introdução à Engenharia de Computação***

# Introdução

- O número é um conceito abstrato que representa a idéia de quantidade; portanto, é um conceito fundamental para a área de computação.
- Um sistema de numeração é o conjunto de símbolos utilizados para representar quantidades e as regras que definem a forma de representação.
- Um sistema de numeração é determinado fundamentalmente pela BASE, que indica a quantidade de símbolos e o valor de cada símbolo.
  - Decimal (base 10): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
  - Binário (base 2): 0, 1
  - Octal (base 8): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
  - Hexadecimal (base 16): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F
  - Base B genérica: 0 a B - 1

# Introdução (cont.)

- Em sistemas digitais, o sistema de numeração binário é o mais importante. Como usa apenas os símbolos 0 e 1, é mais fácil de ser representado por circuitos eletrônicos (presença ou não de tensão, chave aberta ou fechada, etc.).
- Os símbolos binários são denominados de Bits (Binary Digit). O conjunto de 8 bits é denominado de Byte.
- Para a representação de números binários grandes utilizamos os sistemas de numeração octal e hexadecimal.
  - $1100\ 0000\ 0000\ 0000_2 = 140000_8 = A000_{16}$

# Introdução (cont.)

- A base 10 é importante por ser a que manipulamos cotidianamente;
- A base 2 é útil por conta dos circuitos lógicos, porém documentar números grandes apenas com 0 e 1s é complicado;
- As bases 8 (sistema octal) e 16 (sistema hexadecimal) compactam siginificativamente a representação de números binários.

# Notação Posicional

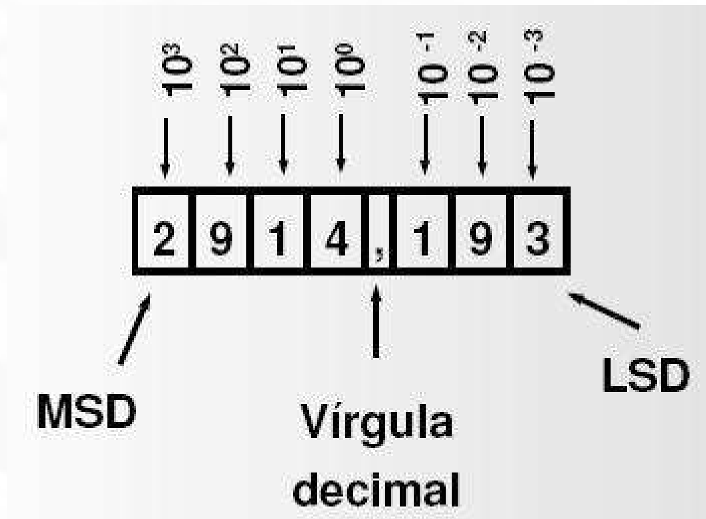
- Em um sistema numérico posicional de base r, um número D tem seu valor dado por:

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i r^i$$

$$d_{P-1}\ d_{P-2} \ldots\ d_1\ d_0,\ d_{-1} \ldots\ d_{-n}$$

  - $r$ : base do sistema
  - $p$ : número de dígitos à esquerda da vírgula
  - $n$ : número de dígitos à direita da vírgula
- O valor de cada símbolo é determinado de acordo com a sua posição no número.

# Notação Posicional (cont.)




2914,193

$$2.10^{3} + 9.10^{2} + 1.10^{1} + 4.10^{0} + 1.10^{-1} + 9.10^{-2} + 3.10^{-3}$$

# Generalização para base qualquer

- Seja “b” a base de representação de um número e A, B, C, D, E,... os símbolos dos algarismos deste sistema, então o número ....

EDCBA na base “b”, escrito convencionalmente como

$$EDCBA_b$$

representa a grandeza $E.b^4 + D.b^3 + C.b^2 + B.b^1 + A.b^0$

# Sistema Binário

- O sistema binário, como sugere o nome, tem dois algarismos aos quais damos geralmente os símbolos 0 e 1;
- Eles correspondem a qualquer conjunto dual, como: *não e sim*; *falso e verdadeiro*; *desligado e ligado*; *negativo e positivo*, etc;
- Nos circuitos lógicos, 0 e 1 representam respectivamente níveis de tensão baixa e alto ou estados de saturação e corte de transistores;
- Daí, uma outra designação comum: L e H (Low e High levels do inglês: baixo e alto níveis de tensão).

# Sistema Binário

$$B = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i 2^i$$

MSB

LSB

$b_{P-1}\, b_{P-2} \ldots b_1\, b_0, b_{-1} \ldots b_{-n}$

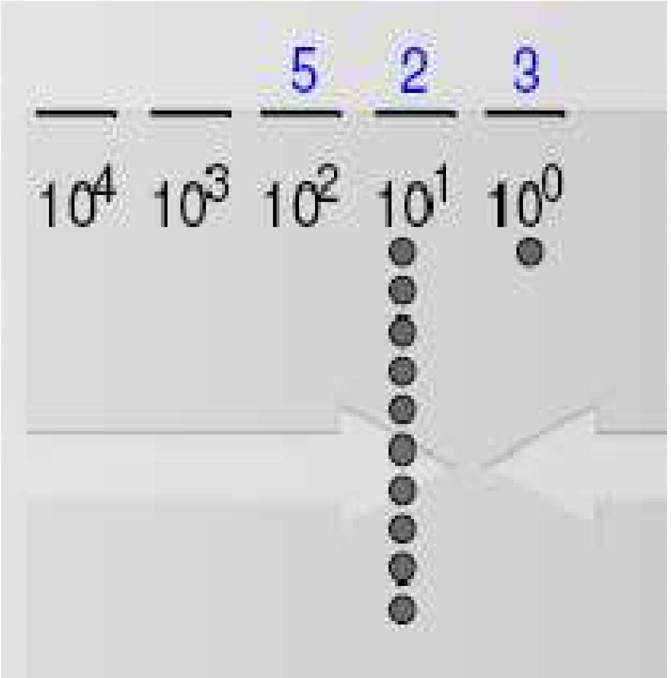
bit

$b_i = \{0, 1\}$

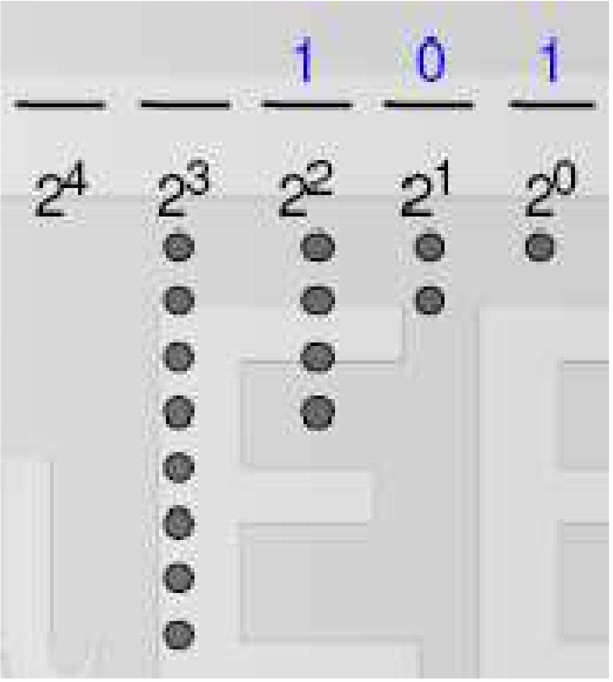
MSB: most significant digit (dígito mais significativo)

LSB: least significant digit (dígito menos significativo)

# Sistema Decimal x Binário




Sistema decimal




Sistema binário

# Sistema Octal

- Sistema de base 8;
- Contém 8 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7;
- É utilizado por ser um sistema que tem relação direta com o sistema binário.
- Veremos esta relação quando tratarmos de transformação entre bases.
- Os valores posicionais são:

$$8^4 - 8^3 - 8^2 - 8^1 - 8^0 - vírgula - 8^{-1} - 8^{-2} - 8^{-3}$$

# Sistema Hexadecimal

- Do hexa=6 e deci=10, sistema numérico de base 16;
- Este sistema possui 16 símbolos distintos em sua contagem;
- Além dos 10 dígitos (0 a 9), utiliza as letras A, B, C, D, E e F que fazem o papel das grandezas 10,11,12,13,14,15;
- Usamos as letras maiúsculas pela necessidade de termos que representar cada uma destas grandezas com um único algarismo.
- O sistema Hexadecimal é um sistema muito utilizado em computadores.

| HEXADECIMAL | DECIMAL | BINÁRIO |
| --- | --- | --- |
| 0 | 0 | 0000 |
| 1 | 1 | 0001 |
| 2 | 2 | 0010 |
| 3 | 3 | 0011 |
| 4 | 4 | 0100 |
| 5 | 5 | 0101 |
| 6 | 6 | 0110 |
| 7 | 7 | 0111 |
| 8 | 8 | 1000 |
| 9 | 9 | 1001 |
| A | 10 | 1010 |
| B | 11 | 1011 |
| C | 12 | 1100 |
| D | 13 | 1101 |
| E | 14 | 1110 |
| F | 15 | 1111 |

# Conversão Binário -> Decimal

- Devemos considerar os valores posicionais na base 2 e fazer a soma das potências dos bits em “1”:

$$11011_{(2)} = (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0)$$

$$11011_{(2)} = 27_{(10)}$$

# Conversão Octal -> Decimal

- Assim como fizemos no sistema binário também utilizamos os valores posicionais:

- Ex 1:

$$372_{(8)} = (3\times 8^{2}) + (7\times 8^{1}) + (2\times 8^{0})$$

$$372_{(8)} = 192 + 56 + 2$$

$$372_{(8)} = 250_{(10)}$$

- Ex 2:

$$24{,}6_{(8)} = (2\times 8^{1}) + (4\times 8^{0}) + (6\times 8^{-1})$$

$$24{,}6_{(8)} = 16 + 4 + 0{,}75$$

$$24{,}6_{(8)} = 20{,}75_{(10)}$$

# Conversão Hexadecimal -> Decimal

- Iremos utilizar as potências com base 16 (valores posicionais);

- Ex 1:

$$356_{(16)} = (3 \times 16^2) + (5 \times 16^1) + (6 \times 16^0)$$

$$356_{(16)} = 768 + 80 + 6$$

$$356_{(16)} = 854_{(10)}$$

- Ex 2:

$$2AF_{(16)} = (2 \times 16^2) + (10 \times 16^1) + (15 \times 16^0)$$

$$2AF_{(16)} = 512 + 160 + 15$$

$$2AF_{(16)} = 687_{(10)}$$

# Conversão base (r) qualquer -> Decimal

- Para converter de binário, octal ou hexadecimal para decimal, use o método da soma dos pesos de cada dígito (valor posicional):

$$D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i r^i$$

# Conversão Decimal -> Binário

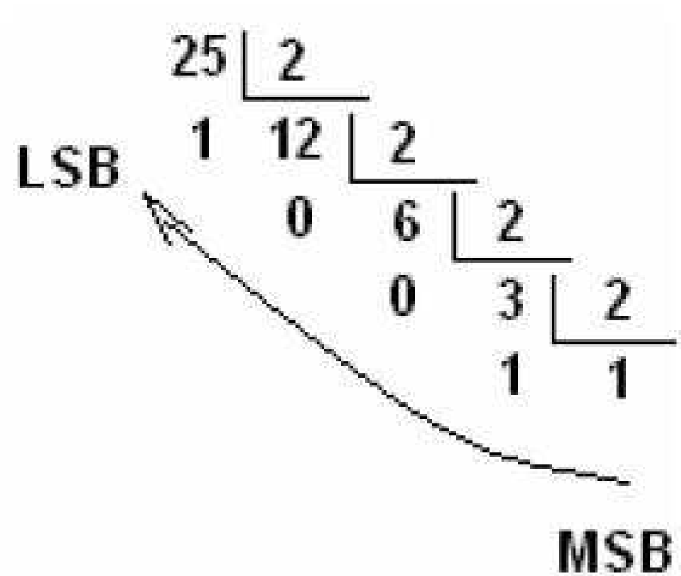
- Há duas formas de converter o número decimal inteiro para o equivalente binário;
- A 1ª é fazer a soma das potências de 2, onde os bits "0" e "1" são colocados nos lugares apropriados:

$$45_{(10)} = 32 + 8 + 4 + 1 = 2^5 + 0 + 2^3 + 2^2 + 0 + 2^0$$

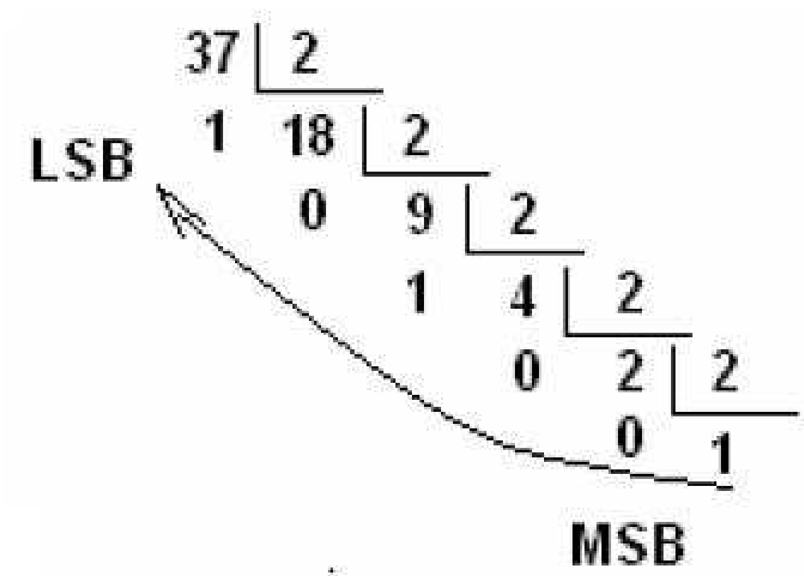
$$45_{(10)} = 101101_{(2)}$$

# Conversão Decimal -> Binário

- A 2ª forma (mais mecânica) é utilizar as divisões sucessivas por 2, e a escrita de modo inverso dos restos de cada divisão até que o quociente 0 seja obtido.



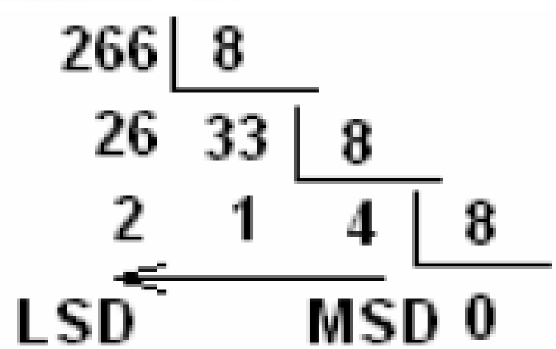

$$25_{(10)} = 11001_{(2)}$$




$$37_{(10)} = 100101_{(2)}$$

# Conversão Decimal -> Octal

- Também utiliza-se o método das divisões sucessivas, só que agora a base é 8;
- Ex: $266_{(10)} = ?_{(8)}$

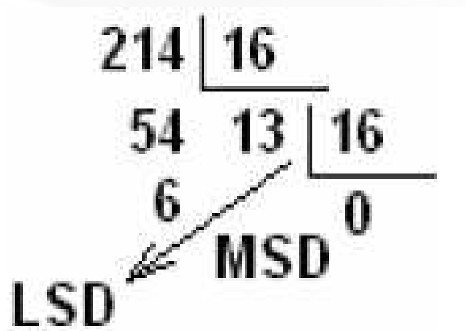



$266_{(10)} = 412_{(8)}$

# Conversão Decimal -> Hexadecimal

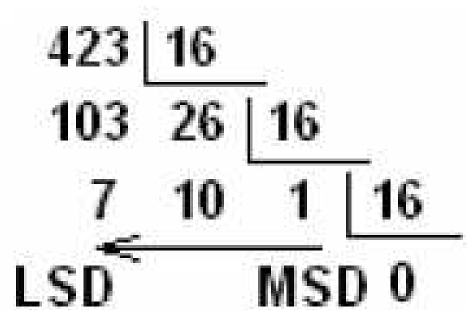
- Da mesma forma utiliza-se o processo de divisões sucessivas;

  - Ex 1:




$$214_{(10)} = D6_{(16)}$$

  - Ex 2:




$$423_{(10)} = 1A7_{(16)}$$

# Conversão fracionária Decimal -> outros

- Tomemos o seguinte exemplo: $\mathbf{91{,}6_{(10)}} \mathbf{\rightarrow X_{(2)}}$
- A parte inteira do número é convertida conforme o processo já demonstrado e obtemos assim o n° $1011011_{(2)}$.
- A parte fracionária $\mathbf{0{,}6_{(10)}}$ é convertida da seguinte maneira:
- Multiplica-se a parte fracionária pela base "b", neste caso o 2, e separa-se a parte inteira do produto. O resultado obtido da subtração da parte inteira do produto passa a ser o próximo multiplicando. Faz-se sucessivamente esta operação até que consiga uma precisão satisfatória. Lê-se os algarismos separados de cima para baixo.

# Conversão fracionária Decimal -> outros

- Veja o exemplo:

$0{,}6_{10} \rightarrow X_2$

$0{,}6_{10} \rightarrow X_8$ (exercício)

MSB

*0,6x2=1,2*

*menos a parte inteira (1)=0,2*

*vezes 2= 0,4*

*menos a parte inteira (0) = 0,4*

*x2 = 0,8*

*menos a parte inteira (0)= 0,8*

*x 2 = 1,6*

*menos a parte inteira (1)= 0,6*

*x 2 = 1,2*

*menos a parte inteira (1)=0,2 e assim por diante*

LSB

# Conversão fracionária Decimal -> outros

- Lendo de cima para baixo teremos 10011, então

  $0,6_{(10)} = 10011_{(2)}$ .
- Fazendo uma verificação, podemos ver que $0,10011_{(2)}$ é igual a:

$$1x2^{-1}+0x2^{-2}+0x2^{-3}+1x2^{-4}+1x2^{-5}=1/2+1/16+1/32=19/32=0,59375$$

- Note que houve uma diferença de precisão na representação da grandeza nas diferentes bases.

# Conversão Decimal -> base (b) qualquer

- Para a parte inteira: divisões sucessivas por (b);
- Para a parte fracionária: multiplicações sucessivas por (b).

# Conversão Octal -> Binário

- A principal vantagem do sistema octal é a transcrição de cada dígito octal para binário, sem a necessidade de cálculos:

- Ex 1:

$$472_{(8)} = [100][111][010]$$

$$472_{(8)} = 100111010_{(2)}$$

- Ex 2:

$$5431_{(8)}[101][100][011][001]$$

$$5431_{(8)} = 101100011001_{(2)}$$

| OCTAL | BINÁRIO |
|---|---|
| 0 | 000 |
| 1 | 001 |
| 2 | 010 |
| 3 | 011 |
| 4 | 100 |
| 5 | 101 |
| 6 | 110 |
| 7 | 111 |

# Conversão Hexadecimal -> Binário

- Assim como na conversão octal para binário, utilizamos a substituição de cada dígito hexadecimal para seu correspondente binário;

- Ex:

$$9F2_{(16)} = [1001][1111][0010]$$

$$9F2_{(16)} - 100111110010_{(2)}$$

# Conversão Binário -> Octal

- A conversão de números binários inteiros para octais inteiros se dá substituindo o conjunto de cada 3 binários pelo octal equivalente;
- Esta divisão deverá ser feita da direita (LSB) para esquerda (MSB); se faltar bits à esquerda preencher com zeros.
- Ex 1:

$$100111010_{(2)} = [100][111][010]$$

$$100111010_{(2)} = 472_{(8)}$$

- Ex 2:

$$11010110_{(2)} = [011][010][110]$$

$$11010110_{(2)} = 326_{(8)}$$

# Conversão Binário -> Hexadecimal

- Análogo à conversão Binário -> Octal, só que agrupando 4 dígitos ao invés de 3.

- Ex:

$$1110100110_{(2)} = [0011][1010][0110]$$

$$1110100110_{(2)} = 3A6_{(16)}$$

# Conversão Hexadecimal <-> Octal

- Converter para Binário e depois para Octal ou Hexadecimal.

- Ex:

$$B2F_{(16)} = [1011][0010][1111]$$
$$B2F_{(16)} = 101100101111_{(2)}$$
$$B2F_{(16)} = [101][100][101][111]$$
$$B2F_{(16)} = 5457_{(8)}$$

# Resumo das conversões

- De binário, octal ou hexadecimal para decimal, use o método da soma dos pesos de cada dígito (valor posicional): $D = \sum_{i=-n}^{p-1} d_i r^i$
- De decimal para binário, octal ou hexadecimal, utilize o método das divisões/multiplicações sucessivas;
- De binário para octal ou hexadecimal, agrupe os bits da direita para esquerda e converta cada grupo;
- De octal ou hexadecimal para binário converta cada dígito em 3 (octal) ou 4 (hexadecimal) bits equivalentes;
- De octal para hexadecimal ou (vice-versa) utilize a conversão para binário, daí então faça a conversão desejada.

# Conversões

- Por que não convertemos cada dígito diretamente de Decimal para Binário como no exemplo abaixo?

Exemplo:

$$874_{(10)} = [1000][0111][0010]$$

# Conversões

- Por que não convertemos cada dígito diretamente de Decimal para Binário como no exemplo abaixo?

Exemplo:

$$874_{(10)} = [1000][0111][0010]$$

- Reposta: 10 não é potência de 2.

# Grandeza x Representação

- *"Temos trinta e cinco computadores no laboratório."*
- Note a diferença entre a grandeza (a quantidade de objetos) e uma possível representação da mesma.
- Podemos representar tal grandeza em qualquer um dos sistemas vistos;

# Grandeza x Representação

- Temos trinta e cinco computadores no laboratório.
- Note a diferença entre a grandeza (a quantidade de objetos) e uma possível representação da mesma.
- Podemos representar tal grandeza em qualquer um dos sistemas vistos;
- Decimal: $35_{(10)}$
- Binário: $10011_{(2)}$
- Octal: $43_{(8)}$
- Hexadecimal: $23_{(16)}$

# Formas de Representação

- Notar que os sistemas Octal e Hexadecimal podem ser usados como formas compactadas de representar um número em Binário;
- Octal agrupando 3 dígitos binários em um dígito Octal;
- Hexadecimal agrupando 4 dígitos binários em um dígito Hexadecimal.

# Exercícios propostos

- 1) $1990_{(10)} \rightarrow X_{(2)}$
- 2) $10101010_{(2)} \rightarrow X_{(10)}, X_{(8)}, X_{(16)}$
- 3) $AB2C_{(16)} \rightarrow X_{(10)}, X_{(8)}$
- 4) $10011_{(2)} \rightarrow X_{(8)}$
- 5) $54{,}75_{(10)} \rightarrow X_{(2)}$

# Exercícios propostos

- 6) $F8{,}A_{(16)} \rightarrow X_{(8)}$
- 7) $110{,}111_{(2)} + 728_{(10)} \rightarrow X_{(10)}$
- 8) $AF{,}4_{(16)} - 26_{(8)} \rightarrow X_{(10)}$
- 10) $270{,}1_{(10)} - 110_{(2)} \rightarrow X_{(16)}$
- 11) $100_{(2)} \times 14_{(16)} \rightarrow X_{(10)}$

Obs: para conferir o resultado, vocês podem fazer a conversão de volta.

# Exercícios Propostos

- Quantas grandezas (inteiras) diferentes podemos representar usando (n) posições em um sistema de base (b)?

| _ | _ | _ | _ | ... | _ | _ | _ | _ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **n** | **n-1** | **n-2** | **n-3** | | **3** | **2** | **1** | **0** |