Laboratório de Pesquisa em Redes e Multimídia

Álgebra Booleana

Introdução ao Computador 2008/01

Bernardo Gonçalves

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Informática

Sumário

- Histórico
- Álgebra de Boole
- Axiomas da Álgebra de Boole
- Álgebra de Boole de dois valores literais
- Teoremas da Álgebra de Boole
- Simplificação de expressões booleanas

Histórico

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

- "A única maneira de garantir a consistência de nossos raciocínios é torná-los tão tangíveis quanto os dos matemáticos…".
- "Se duas pessoas discordarem, basta calcular quem está certo". (*The Art of Discovery,* 1685)

Leibniz

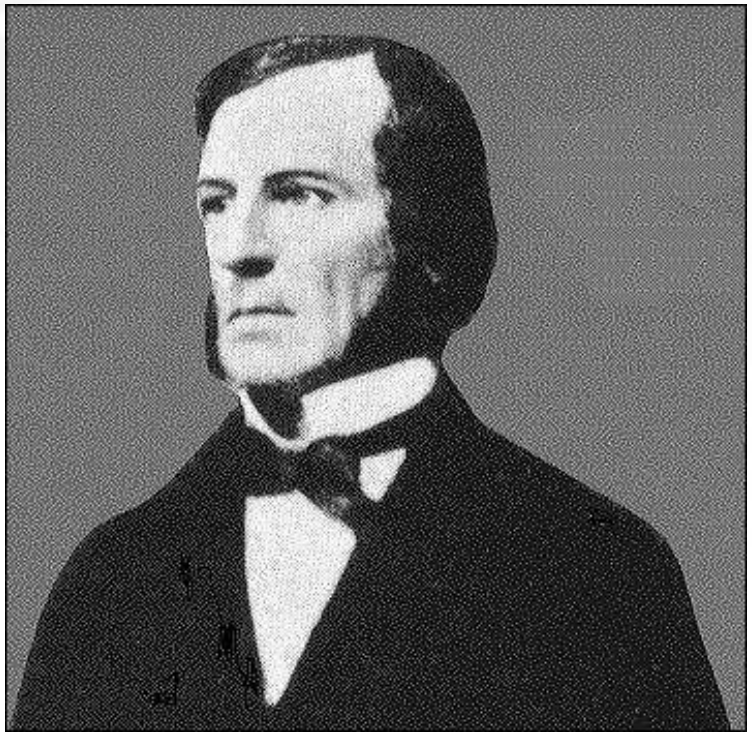
- Primeiro a propor o sistema binário;
- Criador do Cálculo (paralelamente a Newton);
- Os princípios da lógica de Leibniz (e de toda sua filosofia) eram:
  - (i) Todas as nossas idéias são formadas a partir de um pequeno número de idéias simples, que formam o *alfabeto do pensamento humano*;
  - (ii) Idéias complexas procedem dessas idéias simples por uma combinação uniforme e simétrica, análoga à multiplicação aritmética.

Idéias de Leibniz

- Com relação ao princípio (i), o número de idéias simples é bem maior do que Leibniz pensou;
- Quanto a (ii), a lógica pode, de fato, ser situada em uma operação de combinação simétrica, mas tal operação é análoga também à adição, e não só à multiplicação;
- A Lógica Formal que surgiria no início do século XX exige também, no mínimo, negação unária e variáveis quantificadas sobre algum universo de discurso;
- Leibniz não publicou nada em Lógica Formal durante sua vida; a maior parte do que ele escreveu no assunto consiste de rascunhos e trabalhos não terminados.

Histórico

- George Boole (1815-1864)



- Considerado um dos fundadores da Ciência da Computação, apesar de computadores não existirem em seus dias.

Idéias de Boole

- Usar símbolos algébricos como x, y, z, p, q, r para denotar palavras, frases, ou proposições;
- O que Boole estava pensando era em criar um sistema algébrico com operações como adição e multiplicação e métodos de resolução de equações;
- A Álgebra de Boole exigia a formulação de uma linguagem simbólica do pensamento;
- Resolver uma equação em tal linguagem não levaria a uma resposta numérica, mas sim a uma conclusão lógica.
- Sua álgebra seria a "álgebra do pensamento".

Álgebra Booleana (noções)

- Álgebra Booleana é uma variante de álgebra ordinária como ensinado no ensino médio;
- Ela difere da ordinária, basicamente, em três coisas:
  - (i) nos valores que as variáveis podem assumir, que são de caráter lógico (zero e um indicando verdadeiro e falso, respectivamente);
  - (ii) nas operações aplicáveis a esses valores;
  - (iii) e nas propriedades dessas operações, i.e., as leis que elas obedecem.

Álgebra Booleana (noções)

- Álgebra "Tradicional":
  - Variáveis representam números reais;
  - Operadores são aplicados às variáveis e o resultado é um número real;
- Álgebra Booleana:
  - Variáveis representam apenas 0 ou 1
  - Operadores retornam apenas 0 ou 1

Álgebra Booleana (noções)

- Por exemplo, supondo:
  - x = jovem;
  - y = faz Ciência da Computação;
- (1 - x) iria então representar a operação de selecionar todas as coisas no mundo exceto jovens, isto é, todas as coisas que não são jovens;
- (xy) representaria o conjunto dos jovens que fazem Ciência da Computação;
- (1 - x) (1 - y) seria todas as coisas que não são jovens nem fazem Ciência da Computação;
- (x + y) seria o conjunto das coisas que são jovens ou que fazem Ciência da Computação.

Álgebra Booleana (noções)

- Usando tais símbolos, proposições poderiam ser reduzidas à forma de equações;
- E assim uma conclusão silogística para duas premissas seria obtida através de regras algébricas ordinárias que permitem alcançar-se a solução da equação;
- Boole publicou sua álgebra na obra *"An Investigation of the Laws of Thought, on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities"* (1854).

Operações booleanas básicas

- $x \wedge y = xy$ (conjunção)
- $x \vee y = x + y - xy$ (disjunção)
- $\neg x = 1 - x$ (negação)

- Valores podem ser obtidos através da tabela verdade

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	1	1

x	$\neg x$
0	1
1	0

- Ou com equações gerando os valores explicitamente

$0 \wedge 0 = 0$ $0 \vee 0 = 0$

$0 \wedge 1 = 0$ $0 \vee 1 = 1$

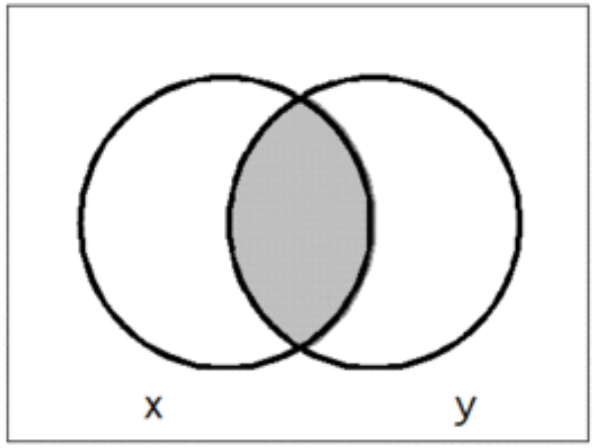
$1 \wedge 0 = 0$ $1 \vee 0 = 1$

$1 \wedge 1 = 1$ $1 \vee 1 = 1$

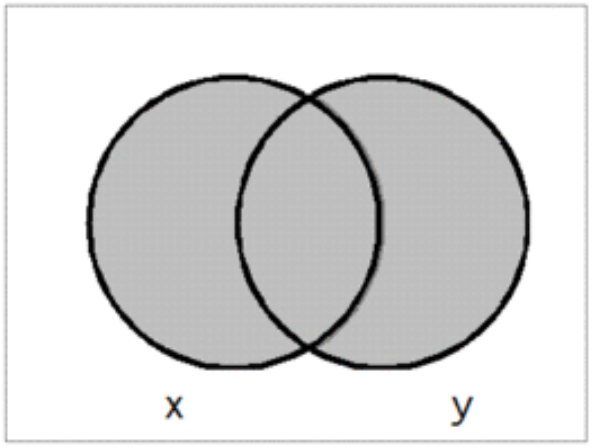
$\neg 0 = 1$ $\neg 1 = 0$

Representação diagramática

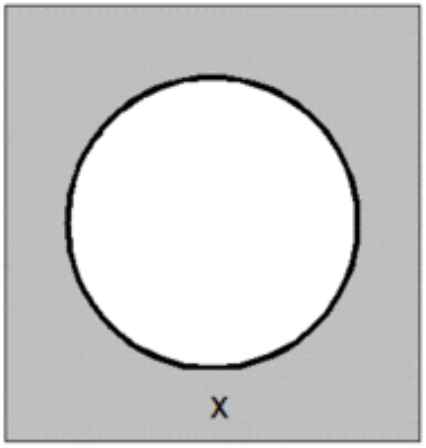
- Diagramas de Venn para conjunção, disjunção e complemento.



x^y



xvy



¬x

Operações booleanas derivadas

- $x \rightarrow y = \neg(x \wedge \neg y)$ (condicional)
- $x \oplus y = (x \vee y) \wedge \neg(x \wedge y)$ (ou exclusivo)
- $x \equiv y = \neg(x \oplus y)$ (equivalência)

- Valores podem ser obtidos através da tabela verdade

x	y	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$	$x \equiv y$
0	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
1	1	1	0	1

Definição da Álgebra de Boole

Definição de um sistema algébrico qualquer

- Chamamos de álgebra abstrata ou sistema algébrico a um conjunto não vazio munido de um ou mais operadores binários sobre ele definidos;
- Denotando por A o conjunto e por * e Δ os operadores definidos sobre A, podemos ter:
  - (A, *) ou (A, Δ) com um operador
  - ou (A, *, Δ) com dois operadores

Definição da Álgebra de Boole

- O sistema algébrico **(B, +, .)** é uma Álgebra de Boole se e somente se $\forall$ a, b, c ϵ B valem os axiomas:
- A1. $a + b \in B$ (oclusão ou encerramento)
- A2. $a \cdot b \in B$ (oclusão ou encerramento)
- A3. $a + b = b + a$ (comutatividade)
- A4. $a \cdot b = b \cdot a$ (comutatividade)
- A5. $a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$ (distributividade) (não-intuitivo)
- A6. $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (distributividade)

Definição da Álgebra de Boole

- A7. $\exists\ 0 \in B$ tal que para cada $a \in B$, $a + 0 = 0 + a = a$ (identidade)
- A8. $\exists\ 1 \in B$ tal que para cada $a \in B$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (identidade)
- A9. Para cada $a \in B$, $\exists\ a' \in B$ tal que $a + a' = 1$ e $a \cdot a' = 0$ (o elemento a' chama-se complemento de a)

Definição da Álgebra de Boole

- Resumo:
  - Conjunto de elementos **B**
  - Operações binárias:{**· , +**}
  - Operações unárias: {**‘**}, também pode ser utilizado o $\bar{}$
  - Regras de prioridade: **‘, ·, +**
  - O conjunto B contém pelo menos dois elementos a, b sendo a ≠ b

Literais

- Cada aparecimento de uma variável ou do seu complemento numa expressão booleana é designado por um literal;
- Uma expressão booleana é mais simples do que outra se tiver menos literais (pode indicar que contém menor número de operações);
- Exemplo: ab'c+ab+a'bc'+b'c
  - 10 literais
  - 3 variáveis

Álgebra de Boole de dois valores

- O conjunto B={1, 0} e as operações lógicas OR, AND e NOT satisfazem os axiomas da álgebra booleana?
- AND (E)
  - Símbolo: · ou nenhum
- OR (OU)
  - Símbolo: **+**
- NOT (COMPLEMENTO)
  - Símbolo: ` ou ¯
- Também são encontrados na literatura os seguintes símbolos: AND (&, ^); OR (|, v); NOT(~, !)

Álgebra de Boole de dois valores

X	Y	X AND Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

X	NOT X
0	1
1	0

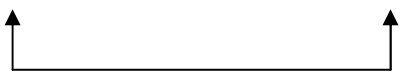
X	Y	X OR Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- B contém dois elementos {0, 1} e $0 \neq 1$
- Oclusão
- Comutatividade
- Identidade
- Complemento

Álgebra de Boole de dois valores

- Prova de distributiva de .

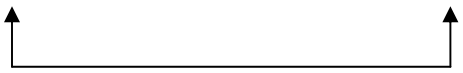
x	y	z	y+z	x(y+z)	xy	xz	xy+xz
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Álgebra de Boole de dois valores

- Prova de distributiva de +

x	y	z	yz	x+(yz)	x+y	x+z	(x+y)(x+z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Exemplo de uso das propriedades (1)

- Mostrar que abc′ equivale a c′ba
  - Usar a propriedade comutativa:
    - a.b.c′ = a.c′.b = c′.a.b = c′.b.a = c′ba
- Mostrar que abc + abc′ = ab
  - Usar a propriedade distributiva de .
    - abc + abc′ = ab(c+c′)
  - Complemento: trocar c+c′ por 1: ab(c+c′) = ab(1)
  - Identidade
    - ab(1) = ab.1 = ab

Exemplo de uso das propriedades (2)

- Mostrar que x + x'z equivale a x + z
  - Usar a propriedade distributiva de +
  - Trocar x+x'z by (x+x').(x+z)
  - Complemento: trocar (x+x') por 1
  - Identidade: trocar 1(x+z) por x+z

Formalização do pensamento humano

- Converter as seguintes afirmações em língua portuguesa para equações booleanas:

- Q1. Verdade se a é 1 e b é 1.
- Resposta: F = a . b

- Q2. Verdade se a ou b forem 1.
- Resposta: F = a + b

- Q4. Verdade se a é 1 e b é 0.
- Resposta: F = a . b’

Avaliando equações booleanas

- Avaliar a equação booleana **F = (a.b) + (c.d)** para os seguintes valores de a, b, c, e d:
  - Q1: a=1, b=1, c=1, d=0
  - Resposta: F = (1 . 1) + (1 . 0) = 1 + 0 = 1
  - Q2: a=0, b=1, c=0, d=1.
  - Resposta: F = (0 . 1) + (0 . 1) = 0 + 0 = 0

Avaliando equações booleanas

- Ex: "Eu irei almoçar se Maria ou João forem e se Célia não for."
- Suponha que F represente o meu comparecimento ao almoço (1 significa presença, 0 indica ausência)
- Do mesmo modo, (m) significa a presença de Maria, (j) a de João e (c) a de Célia

- **F = (m OR j) AND NOT(c)**
- **F = (m + j) c'**

Avaliando equações booleanas

- Avaliação formal
- Para m=1, j=0, c=1

- F = (m + j) c’
- F = (1 + 0) . 1’ = 1 . 0 = **0**

Teoremas

Teoremas da Álgebra de Boole

- Idempotência
  - a + a = a
  - a . a = a
- Elemento Nulo
  - a + 1 = 1
  - a . 0 = 0

Teoremas da Álgebra de Boole

- Involução
  - (a')' = a
- Associatividade
  - (a+b)+c = a+(b+c)
  - (a.b).c = a.(b.c)
- De Morgan
  - (ab)' = a' + b'
  - (a + b)' = a' b'

Teorema de De Morgan

- As leis de De Morgan são muito importantes para fazer inferências válidas em provas e argumentos dedutivos;
- (i) $(a+b+c+\ldots)' = a'.b'.c'\ldots$
- (ii) $(a.b.c\ldots.)' = a'+b'+c'+\ldots$

Simplificação de expressões booleanas (1)

- Simplificar a expressão (a+b) (a+b'+c')

Simplificação de expressões booleanas (2)

- Simplificar a expressão $(p+qr)\,(p'q'+r')+p'q'r'$

Simplificação de expressões booleanas (3)

- Simplificar a expressão pq’ + pqr + p’r

Simplificação de expressões booleanas (4)

- Determinar o complemento de pq’ + p’q