

Apostila Mapas de Veitch-Karnaugh

Álgebra de Boole e Simplificação de Circuitos Lógicos	3
Variáveis e Expressões na Álgebra de Boole	3
Postulados	3
Postulados da Complementação	3
Postulado da Adição	4
Postulado da Multiplicação.....	6
Propriedades.....	8
Propriedade Comutativa.....	8
Propriedade Associativa.....	8
Propriedade Distributiva	8
Teoremas de De Morgan.....	9
1 ° Teorema de De Morgan	10
2° Teorema de De Morgan.....	11
Identidades Auxiliares	12
Resumo	14
Simplificação de Expressões Booleanas.....	15
Exercícios Resolvidos.....	17
Simplificação de Expressões Booleanas através dos Diagramas de Veitch-Karnaugh	21
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis	22
Diagramas de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis	30
Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis	37
Exercícios Resolvidos	45
Diagrama para 5 Variáveis.....	52
Exercício Resolvido	58
Diagramas com Condições Irrelevantes.....	60
Exercícios Resolvidos.....	63
Casos que não Admitem Simplificação	66
Agrupamentos de Zeros	69
Outra Forma de Apresentação do Diagrama de Veitch-Karnaugh	71
Exercícios Propostos.....	73
RESPOSTAS	80

Álgebra de Boole e Simplificação de Circuitos Lógicos

Variáveis e Expressões na Álgebra de Boole

Como vimos anteriormente, as variáveis booleanas são representadas através de letras, podendo assumir os valores 0 e 1.

Expressão booleana é a sentença matemática composta de termos cujas variáveis são booleanas e os resultados podem ser 0 e 1.

Postulados

A seguir apresentaremos os postulados da complementação, da adição e da multiplicação da Álgebra de boole e suas respectivas identidades resultantes.

Postulados da Complementação

Este postulado, mostra como são as regras da complementação na álgebra de Boole. Chamaremos de $\overline{A}$ o complemento de A :

$$1^{\circ}) \text{ Se } A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$$

$$2^{\circ}) \text{ Se } A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$$

Através do postulado da complementação, podemos estabelecer a seguinte identidade:

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Se $A = 1$, temos: $\overline{A} = 0$ e se $\overline{A} = 0 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 1$.

Se $A = 0$, temos: $\overline{A} = 1$ e se $\overline{A} = 1 \rightarrow \overline{\overline{A}} = 0$.

—

Assim sendo, podemos escrever: $A = A$.

O bloco lógico que executa o postulado da complementação é o inversor.

Postulado da Adição

Este postulado, mostra como são as regras da adição dentro da Álgebra de Boole.

$$1^{\circ}) 0 + 0 = 0$$

$$2^{\circ}) 0 + 1 = 1$$

$$3^{\circ}) 1 + 0 = 1$$

$$4^{\circ}) 1 + 1 = 1$$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes identidades:

$$A + 0 = A.$$

A pode ser 0 ou 1, vejamos, então, todas as possibilidades:

$$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$A = 1 \rightarrow 1 + 0 = 1$$

Notamos que o resultado será sempre igual à variável A.

$$\mathbf{A + 1 = 1.}$$

Vejamos as possibilidades:

$$A = 0 \rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$$

Notamos que se somarmos 1 a uma variável, O resultado será sempre 1.

$$\mathbf{A + A = A.}$$

Vejamos as possibilidades:

$$A = 0 \rightarrow 0 + 0 = 0$$

$$A = 1 \rightarrow 1 + 1 = 1$$

Notamos que se somarmos a mesma variável, o resultado será ela mesma.

$$\mathbf{A + \overline{A} = 1 .}$$

Vejamos as possibilidades:

$$A = 0 \rightarrow \bar{A} = 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$A = 1 \rightarrow \bar{A} = 0 \rightarrow 1 + 0 = 1$$

Notamos que sempre que somarmos a um variável o seu complemento, teremos como resultado 1.

O bloco lógico que executa o postulado da adição é o OU.

Postulado da Multiplicação

É o postulado que determina as regras da multiplicação booleana.

$$1^{\text{o}}) 0 \cdot 0 = 0$$

$$2^{\text{o}}) 0 \cdot 1 = 0$$

$$3^{\text{o}}) 1 \cdot 0 = 0$$

$$4^{\text{o}}) 1 \cdot 1 = 1$$

Através deste postulado, podemos estabelecer as seguintes regras:

$$A \cdot 0 = 0$$

Podemos confirmar, verificando todas as possibilidades.

$$A = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

$$A = 1 \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Notamos que todo numero multiplicado por 0 é 0.

$$A \cdot A = A$$

Esta identidade a primeira vista estranha, é verdadeira, como podemos confirmar pela análise de todas as possibilidades.

$$A = 0 \rightarrow 0 \cdot 0 = 0$$

$$A = 1 \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$$

Notamos que os resultados serão sempre iguais a A.

$$A \cdot \overline{A} = 0$$

Vamos analisar todas possibilidades:

$$A = 0 \rightarrow 0 \cdot 1 = 0$$

$$A = 1 \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

Notamos que para ambos os valores possíveis que a variável pode assumir, o resultado da expressão será 0.

O bloco lógico que executa o postulado da multiplicação é o E..

Propriedades

A seguir, descreveremos as principais propriedades algébricas, úteis principalmente, no manuseio e simplificação de expressões. tal como na matemática comum, valem na Álgebra de Boole as propriedades comutativa distributiva e associativa.

Propriedade Comutativa

$$\text{Adição: } A + B = B + A$$

$$\text{Multiplicação: } A \cdot B = B \cdot A$$

Propriedade Associativa

$$\text{Adição: } A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

$$\text{Multiplicação: } A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C$$

Propriedade Distributiva

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Vamos verificar esta propriedade através da tabela verdade, analisando todas possibilidades.

A	B	C	$A(B+C)$	$AB + AC$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Tabela 3.1

Notamos, pela tabela 3.1, que as expressões se equivalem.

Teoremas de De Morgan

Os teoremas de Morgan são muito empregados na prática em simplificações de expressões booleanas e ainda no desenvolvimento de circuitos digitais como veremos em tópicos posteriores

1 ° Teorema de De Morgan

O complemento do produto é igual a soma dos complementos:

$$\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} + \overline{B}$$

Para provar este teorema vamos montar a tabela da verdade de cada membro e comparar os resultados.

A	B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Tabela 3.2

Notamos a igualdade de ambas as colunas

O teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\overline{(A.B.C \dots N)} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \dots + \overline{N}$$

2º Teorema de De Morgan

O complemento da soma é igual ao produto dos complementos

Este teorema é uma extensão do primeiro.

$$\overline{(A.B)} = \overline{A} + \overline{B} \quad \leftarrow 1^{\circ} \text{ Teorema}$$

Podemos reescrevê-lo da seguinte maneira:

$$A.B = \overline{(\overline{A} + \overline{B})}$$

Notamos que $\overline{A}$ é o complemento de A e que $\overline{B}$ é o complemento de B .
Vamos chamar $\overline{A}$ de X e $\overline{B}$ de Y . Assim sendo, temos:

$$\overline{X}.\overline{Y} = \overline{(X + Y)}$$

Reescrevendo, em termos de A e B , temos:

$$\overline{A}.\overline{B} = \overline{(A + B)} \quad \leftarrow 2^{\circ} \text{ Teorema}$$

Da mesma forma que no anterior, o teorema pode ser estendido para mais de duas variáveis:

$$\overline{(A + B + C + \dots + N)} = \overline{A} . \overline{B} . \overline{C} \dots \overline{N}$$

Notamos, também, a aplicação deste teorema no item relativo à equivalência entre blocos lógicos.

Identities Auxiliares

A seguir, vamos deduzir três identidades úteis para a simplificação de expressões.

$$\mathbf{A + A . B = A}$$

Provamos esta identidade, utilizando a propriedade distributiva. Vamos evidenciar no 1º termo:

$$A(1 + B) = A$$

Do postulado da soma temos:

$$1 + B = 1$$

Logo podemos escrever:

$$A . 1 = A \quad \therefore A + AB = A$$

$$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$$

Vamos provar esta identidade:

$$\begin{aligned}
 & (A+B) \cdot (A+C) \\
 &= A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C \quad \rightarrow \text{Propriedade distributiva} \\
 &= A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C \quad \rightarrow \text{Identidade } A \cdot A = A \\
 &= A \cdot (1 + B + C) + B \cdot C \quad \rightarrow \text{Propriedade distributiva} \\
 &= A \cdot 1 + B \cdot C \quad \rightarrow \text{Identities: } 1 + X = 1 \text{ e } A \cdot 1 = A \\
 &\therefore (A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C
 \end{aligned}$$

$$A + \overline{A}B = A + B$$

Vamos provar esta identidade:

$$\begin{aligned}
 & A + \overline{A} \cdot B = \overline{\overline{A + \overline{A} \cdot B}} \quad \rightarrow \text{Identidade } \overline{\overline{X}} = X \\
 &= \overline{\overline{A} \cdot (\overline{A \cdot B})} \quad \rightarrow 2^{\circ} \text{ Teorema de De Morgan: } \overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \\
 &= \overline{\overline{A} \cdot (\overline{A + B})} \quad \rightarrow 1^{\circ} \text{ Teorema de De Morgan aplicado no parênteses: } \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y} \\
 &= \overline{(\overline{A} \cdot A + \overline{A} \cdot \overline{B})} \quad \rightarrow \text{propriedade distributiva e identidade } \overline{A} \cdot A = 0 \\
 &= \overline{(\overline{A} \cdot \overline{B})} \\
 &= (A + B) \quad \rightarrow 1^{\circ} \text{ Teorema de De Morgan} \\
 &\therefore (A + \overline{A} \cdot B) = A + B
 \end{aligned}$$

Resumo

POSTULADOS		
Complementação	Adição	Multiplicação
$A = 0 \rightarrow \overline{A} = 1$ $A = 1 \rightarrow \overline{A} = 0$	$0 + 0 = 0$ $0 + 1 = 1$ $1 + 0 = 1$ $1 + 1 = 1$	$0 . 0 = 0$ $0 . 1 = 0$ $1 . 0 = 0$ $1 . 1 = 1$
IDENTIDADES		
Complementação	Adição	Multiplicação
$\overline{\overline{A}} = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A + A = A$ $A + \overline{A} = 1$	$A . 0 = 0$ $A . 1 = A$ $A . A = A$ $A . \overline{A} = 0$
PROPRIEDADES		
Comutativa:	$A + B = B + A$ $A . B = B . A$	
Associativa:	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A . (B . C) = (A . B) . C = A . B . C$	
Distributiva:	$A . (B + C) = A . B + A . C$	
TEOREMAS DE MORGAN		
$\overline{(A . B)} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{(A + B)} = \overline{A} . \overline{B}$		
IDENTIDADES AUXILIARES		
$A + A . B = A$ $A + \overline{A} . B = A + B$ $(A + B) . (A + C) = A + B . C$		

Tabela 3.3

Simplificação de Expressões Booleanas

Utilizando o conceito da Álgebra de Boole, podemos simplificar expressões e consequentemente circuitos.

Para efetuarmos estas simplificações, existem, basicamente, dois processos. O primeiro deles é a simplificação através da Álgebra de Boole, segundo é a utilização dos mapas de Veitch-Karnaugh.

$$S = ABC + A\bar{C} + A\bar{B}$$

Vamos simplificá-la, utilizando a Álgebra de Boole. Primeiramente, vamos evidenciar o termo A:

$$S = A(BC + \bar{C} + \bar{B})$$

Agora, aplicando a propriedade associativa, temos:

$$S = A[BC + (\bar{C} + \bar{B})]$$

Aplicando a identidade $\overline{\overline{X}} = X$, temos:

$$S = A[BC + (\overline{\overline{\bar{C} + \bar{B}}})]$$

Aplicando o teorema de De Morgan, temos:

$$S = [BC + (\overline{BC})]A$$

Chamando BC de Y, logo $(\overline{BC}) = \bar{Y}$, temos então:

$$S = A(Y + \bar{Y})$$

Como $Y + \bar{Y} = 1$, logo: $S = A \cdot 1 = A \therefore S = A$

Esta expressão mostra a importância da simplificação e a consequente minimização do circuito. pois os resultados são idênticos aos valores assumidos pela variável A, assim sendo, todo o circuito pode ser substituído por um único fio ligado à variável A.

Como outro exemplo, vamos simplificar a expressão:

$$S = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} C$$

Tirando $\overline{A} \cdot \overline{C}$ em evidência nos dois primeiros termos, temos:

$$S = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B) + A \overline{B} C$$

Aplicando a identidade: $B + \overline{B} = 1$, temos:

$$S = \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B) + A \overline{B} C = \overline{A} \cdot \overline{C} + A \overline{B} C \quad \therefore \quad S = \overline{A} \overline{C} + A \overline{B} C$$

Exercícios Resolvidos

1- Simplifique as expressões booleanas, apresentadas a seguir

$$\text{a) } S = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + A B \overline{C}$$

Evidenciando $\overline{C}$, temos:

$$S = \overline{A} B C + \overline{C}(\overline{A} \overline{B} + \overline{A} B + A \overline{B} + A B)$$

Evidenciando $\overline{A}$ e A , temos:

$$S = \overline{A} B C + \overline{C}[\overline{A}(\overline{B} + B) + A(\overline{B} + B)]$$

$$S = \overline{A} B C + \overline{C}(\overline{A}.1 + A.1) \rightarrow \text{identidade } \overline{X} + X = 1$$

$$S = \overline{A} B C + \overline{C}(\overline{A} + A)$$

$$S = \overline{A} B C + \overline{C}.1 \rightarrow \text{identidade } \overline{X} + X = 1$$

$$S = \overline{\overline{\overline{A} B C + \overline{C}}} \rightarrow \text{identidade } \overline{\overline{X}} = X$$

$$S = \overline{(\overline{A} B C). \overline{C}} \rightarrow \text{teorema de De Morgan: } \overline{(X + Y)} = \overline{X} . \overline{Y}$$

$$S = \overline{(A + \overline{B} + \overline{C}). \overline{C}} \rightarrow \text{teorema de De Morgan: } \overline{(X . Y . Z)} = \overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$$

$$S = \overline{(A C + \overline{B} C + \overline{C}. C)} \rightarrow \text{propriedade distributiva}$$

$$S = \overline{[C.(A + \overline{B})]} \rightarrow \text{propriedade distributiva e identidade } X . \overline{X} = 0$$

$$S = \overline{[\overline{C} + (A + \overline{B})]} \rightarrow \text{teorema de De Morgan: } \overline{(X . Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$$

$$S = \overline{(\overline{C} + \overline{A}. B)} \rightarrow \text{teorema de De Morgan: } \overline{(X + Y)} = \overline{X} . \overline{Y}$$

$$\therefore S = \overline{C} + \overline{A}. B$$

$$\text{b) } S = (A + B + C).(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$S = A\overline{A} + A\overline{B} + AC + \overline{A}B + B\overline{B} + BC + \overline{A}C + \overline{B}C + CC$$

Vamos usar as identidades $X.\overline{X}=0$ e $X.X=X$ e reescrever:

$$S = A\overline{B} + AC + \overline{A}B + BC + \overline{A}C + \overline{B}C + C$$

Colocando C em evidência, temos:

$$S = A\overline{B} + C(A + B + \overline{A} + \overline{B} + 1) + \overline{A}B$$

Usando as identidades: $X+1=1$ e $X.1=X$, obtemos o resultado final:

$$S = A\overline{B} + \overline{A}B + C$$

$$\text{c) } S = \left[\overline{(\overline{A}C)} + B + D \right] + C(\overline{A}CD)$$

Aplicando o teorema de De Morgan ao 1º e 2º termos, obtemos:

$$S = (\overline{\overline{A} + \overline{C}} + B + D) + C(\overline{A} + \overline{C} + \overline{D})$$

Agora, aplicando o teorema de De Morgan ao 1º termo e a propriedade distributiva ao 2º termo, temos:

$$S = ACD\overline{B} + \overline{A}C + C\overline{C} + C\overline{D}$$

Reescrevendo, aplicando a identidade $X.\overline{X}=0$, temos:

$$S = A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}C + C\overline{D}$$

Evidenciando o termo $C\overline{D}$, vamos ter:

$$S = C\overline{D}(A\overline{B} + 1) + \overline{A}C$$

$$S = C\overline{D}.1 + \overline{A}C \rightarrow \text{identidade } X+1=1$$

$$\therefore S = C\overline{D} + \overline{A}C$$

A partir da expressão $S = \overline{(A \odot B)}$, obtenha $S = A \oplus B$.

O primeiro passo é substituir a expressão do circuito coincidência pela sua equivalente:

$$S = \overline{(A \odot B)}$$

$$S = \overline{(\overline{A} \overline{B} + AB)}$$

Aplicando De Morgan $\overline{(X + Y)} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$, temos:

$$S = \overline{(\overline{A} \overline{B})} \cdot \overline{(AB)}$$

Aplicando o outro teorema, $\overline{(X \cdot Y)} = \overline{X} + \overline{Y}$, em cada parênteses, temos:

$$S = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$S = A\overline{A} + \overline{A}B + A\overline{B} + \overline{B}B$$

Como $A\overline{A} = 0$ e $\overline{B}B = 0$, temos:

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} \Rightarrow S = A \oplus B$$

Obtenha o circuito simplificado que executa a expressão:

$$S = (A \oplus B) \left[\overline{B(A + \overline{C}) + \overline{D}(\overline{A + B + \overline{C}})} \right]$$

Aplicando a propriedade distributiva e De Morgan respectivamente aos termos do colchete, temos:

$$S = (A \oplus B)(\overline{AB + B\overline{C} + \overline{D}ABC})$$

Reescrevendo o último termo, em ordem, temos:

$$S = (A \oplus B)(\overline{AB + B\overline{C} + A\overline{B}C\overline{D}})$$

Aplicando De Morgan ao 2º parêntese, temos:

$$S = (A \oplus B)(\overline{AB})(\overline{B\overline{C}})(\overline{A\overline{B}C\overline{D}})$$

Aplicando novamente em cada parêntese e substituindo o 1º pela expressão equivalente do OU Exclusivo, obtemos:

$$S = (\overline{A}B + A\overline{B})(\overline{A} + \overline{B})(\overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Efetuada a multiplicação entre os dois primeiros parênteses, eliminando os termos resultantes, onde: $\overline{A} \cdot A = 0$ e $\overline{B} \cdot B = 0$, obtemos:

$$S = (\overline{A}\overline{A}B + A\overline{B}\overline{B})(\overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Como $x \cdot x = x$, temos:

$$S = (\overline{A}B + A\overline{B})(\overline{B} + C)(\overline{A} + B + \overline{C} + D)$$

Da mesma forma, efetuando a multiplicação entre os dois últimos, obtemos:

$$S = (\overline{A}B + A\overline{B})(\overline{A}\overline{B} + \overline{B}\overline{C} + \overline{B}D + \overline{A}C + BC + CD)$$

Novamente multiplicando, temos:

$$S = \overline{A}BC + \overline{A}BC + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}D + A\overline{B}CD$$

Tirando em evidência $\overline{A}BC$ para os três primeiros termos e $A\overline{B}$ para os últimos, temos:

$$S = \overline{A}BC(1 + 1 + D) + A\overline{B}(\overline{C} + D + CD)$$

Fazendo $(1 + D) = 1$ e colocando em evidência D no 2º parêntese temos:

$$S = \overline{A}BC + A\overline{B}[\overline{C} + D(1 + C)]$$

Como $1 + C = 1$, temos:

$$S = \overline{A}BC + A\overline{B}(\overline{C} + D)$$

$$\therefore S = \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}D$$

A partir da expressão, desenhamos o circuito simplificado visto na figura 3.1.

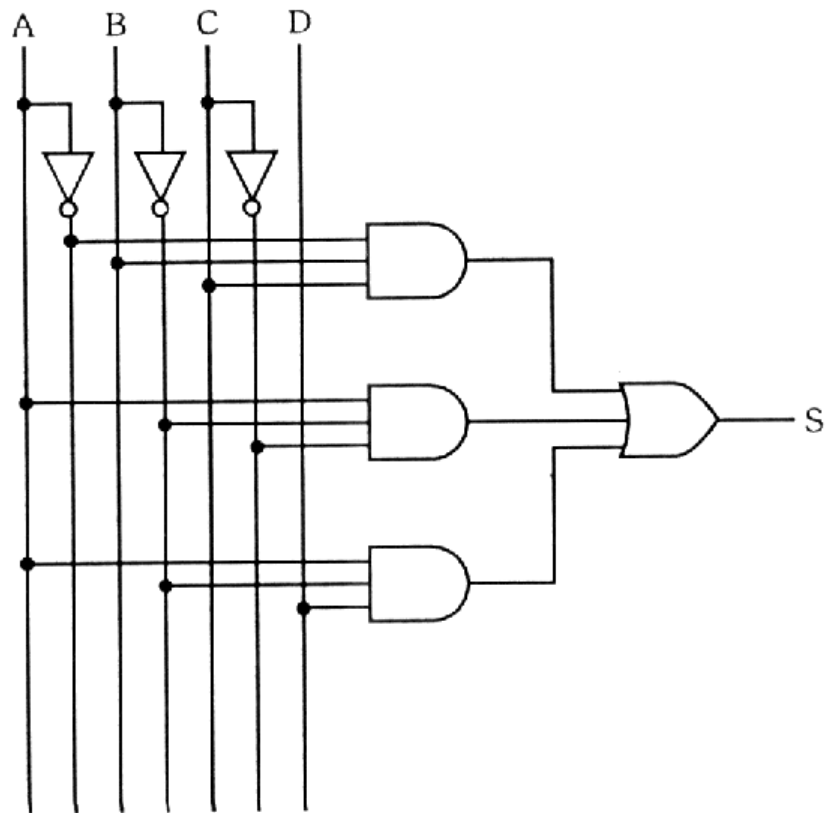


Figura 3.1

Simplificação de Expressões Booleanas através dos Diagramas de Veitch-Karnaugh

Vimos até aqui a simplificação de expressões mediante a utilização dos postulados, propriedades e identidades da Álgebra de Boole. Nestes itens, vamos tratar da simplificação de expressões por meio dos diagramas de Veitch-Karnaugh.

Estes mapas ou diagramas permitem a simplificação de maneira mais rápida dos casos extraídos de tabelas da verdade obtidas de situações quaisquer.

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 Variáveis

A figura 3.2 mostra um diagrama de Veitch-Karnaugh para 2 variáveis:

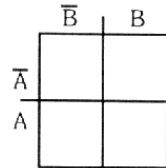


Figura 3.2

No mapa, encontramos todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A e B. A figura 3.3 mostra todas as regiões do mapa.

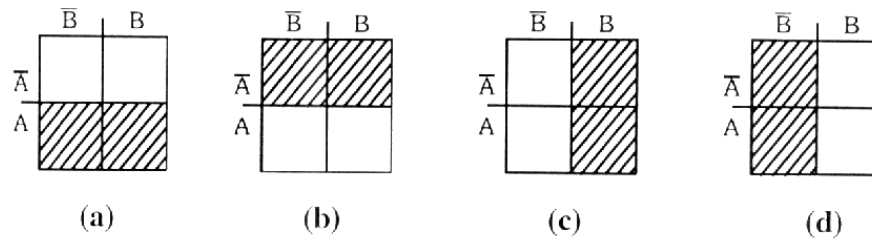


Figura 3.3 - Regiões do mapa de Veitch-Karnaugh:

(a) região onde $A = 1$.

(b) região onde $A = 0$ ($\bar{A} = 1$).

(c) região onde $B = 1$.

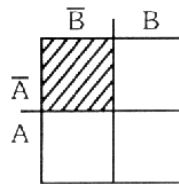
(d) região onde $B = 0$ ($\bar{B} = 1$).

Com 2 variáveis, podemos obter 4 possibilidades:

A	B	
0	0	→ caso 0
0	1	→ caso 1
1	0	→ caso 2
1	1	→ caso 3

Tabela 3.4

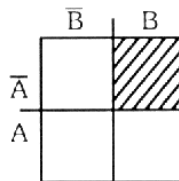
No caso 0, temos: $A = 0$ e $B = 0$. A região do diagrama que mostra esta condição é a da intersecção das regiões onde $A = 0$ e $B = 0$:



→ Esta região também pode ser chamada de região $\overline{A}\overline{B}$.

Figura 3.4

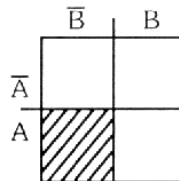
No caso 1, temos: $A = 0$ e $B = 1$. A região do diagrama que mostra esta condição é a da intersecção das regiões onde $A = 0$ ($\overline{A} = 1$) e $B = 1$.



→ Esta região também pode ser chamada de região $\overline{A}B$.

Figura 3.5

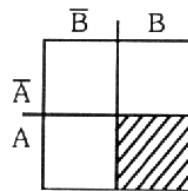
No caso 2, temos a intersecção das regiões onde $A = 1$ e $B = 0$ ($\overline{B} = 1$). Fazendo esta intersecção, temos:



→ Esta região também pode ser chamada de região $A\overline{B}$.

Figura 3.6

No caso 3, temos a intersecção das regiões onde $A = 1$ e $B = 1$. Fazendo esta intersecção, temos:



→ Esta região também pode ser chamada de região AB .

Figura 3.7

Podemos distribuir, então, as 4 possibilidades neste diagrama, da seguinte forma:

	$\bar{B}$	B
$\bar{A}$	Caso 0 $\bar{A} \bar{B}$ 0 0	Caso 1 $\bar{A} B$ 0 1
A	Caso 2 $A \bar{B}$ 1 0	Caso 3 $A B$ 1 1

Figura 3.8

Logo, notamos que cada linha da tabela da verdade possui sua região própria no diagrama de Veitch-Karnaugh.

Essas regiões são, portanto, os locais onde devem ser colocados os valores que a expressão assume nas diferentes possibilidades.

Para entendermos melhor o significado destes conceitos vamos utilizar os exemplos:

A tabela da verdade mostra o estudo de uma função de 2 variáveis. Vamos colocar seus resultados no diagrama de Veitch-Karnaugh.

A	B	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

→ caso 0
→ caso 1
→ caso 2
→ caso 3

Tabela 3.5

$$S = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

Passando para o mapa os casos da tabela da verdade, conforme o esquema de colocação visto má figura 3.8 :

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	0	1
A	1	1

Figura 3.9

Para obtermos a expressão simplificada do diagrama, utilizamos o seguinte metodo:

Tentamos agrupar as regiões onde S é igual a 1, no menor número possível de agrupamentos. As regiões onde S é 1, que não puderem ser agrupadas, serão consideradas isoladamente. Para um diagrama de 2 variáveis, os agrupamentos possíveis são os seguintes:

a) Quadra:

Conjunto de 4 regiões, onde S é igual a 1. No diagrama de 2 variáveis, é o agrupamento máximo, proveniente de uma tabela onde todos os casos valem 1. Assim sendo, a expressão final simplifiicada obtida é $S = 1$. A figura 3.10 ilustra esta situação:

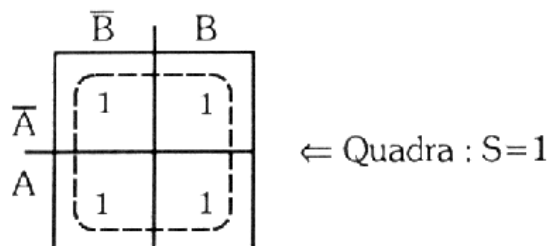


Figura 3.10

b) Pares:

Conjunto de 2 regiões onde S é 1, que tem um lado em comum, ou soa, são vizinhos. As figuras 3.11 e 3.12 mostram exemplos de 2 pares agrupados e suas respectivas expressões, dentro os 4 possíveis em 2 variáveis:

	$\bar{B}$	B	
$\bar{A}$	0	0	
A	1	1	$\Leftarrow$ Par A (está exclusivamente na região A)

Figura 3.11

	$\bar{B}$	B	
$\bar{A}$	1	0	
A	1	0	$\Leftarrow$ Par $\bar{B}$ (está exclusivamente na região $\bar{B}$)

Figura 3.12

c) Termos isolados:

Regiões onde S é 1, sem vizinhança para grupamentos. São os próprios casos de entrada, sem simplificação. A figura 3.13 exemplifica 2 termos isolados, sem possibilidade de agrupamento.

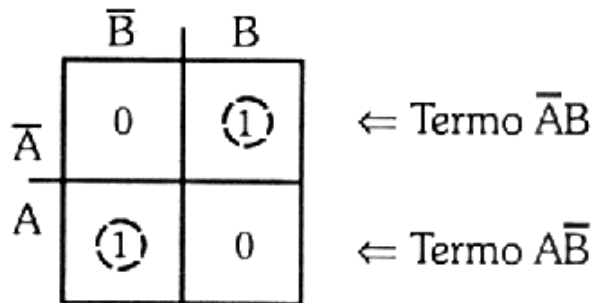


Figura 3.13

Para o exemplo, efetuando os agrupamentos, temos:

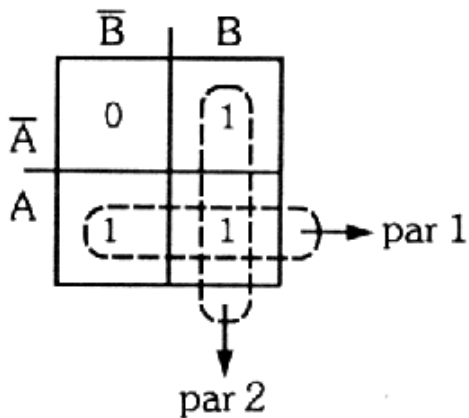


Figura 3.14

Feito isto, escrevemos a expressão de cada par, ou seja a região que o par ocupa no diagrama.

O par 1 ocupa a região onde A é igual a 1, então, sua expressão será Par 1 = A.

O par 2 ocupa a região onde B é igual a 1, então, sua expressão será Par 2 = B.

Notamos também que nenhum I ficou fora dos agrupamentos, e ainda que o mesmo 1 pode pertencer a mais de um agrupamento.

Para obter a expressão simplificada, basta, agruparmos os termos obtidos nos agrupamentos:

$$S = \text{Par 1} + \text{Par 2} \quad \therefore \quad S = A + B$$

Como podemos notar, esta é a expressão de uma porta OU, pois a tabela da verdade também é a da porta OU. Outro fato a ser notado é que a expressão obtida é visivelmente menor do que a extraída diretamente da tabela da verdade, acarretando um circuito mais simples, diminuindo, conseqüentemente, a dificuldade de montagem e o custo do sistema.

2 - Vamos simplificar o circuito que executa a tabela da verdade a seguir:

A	B	S
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Tabela 3.6

Obtendo a expressão diretamente da tabela, temos:

$$S = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$

Transportando a tabela para o diagrama.

	$\overline{B}$	B
$\overline{A}$	1	1
A	1	0

Figura 3.15

Agora vamos agrupar os pares:

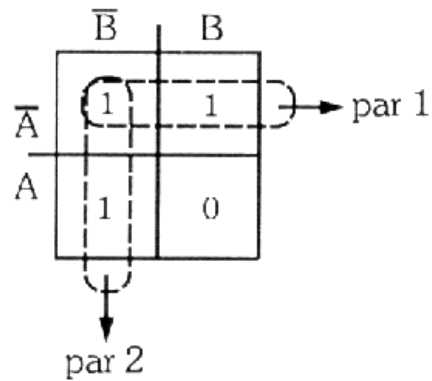


Figura 3.16

As expressões dos pares:

$$\text{par 1} \rightarrow \overline{A}$$

$$\text{par 2} \rightarrow \overline{B}$$

Somando as expressões dos pares, teremos a expressão simplificada:

$$S = \overline{A} + \overline{B}$$

Notamos que a tabela da verdade é a de uma porta NE. Aplicando o teorema de De Morgan à expressão, após a simplificação, encontramos a expressão de uma porta NE:

$$S = \overline{AB}$$

Diagramas de Veitch-Karnaugh para 3 Variáveis

O diagrama de veitch-karnaugh para 3 variáveis é visto na figura 3.17.

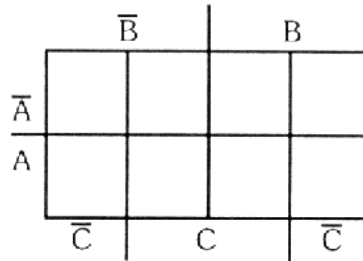


Figura 3.17

No mapa, encontramos todas as possibilidades assumidas entre as variáveis A, B e C. A figura 3.18 mostra as regiões deste mapa

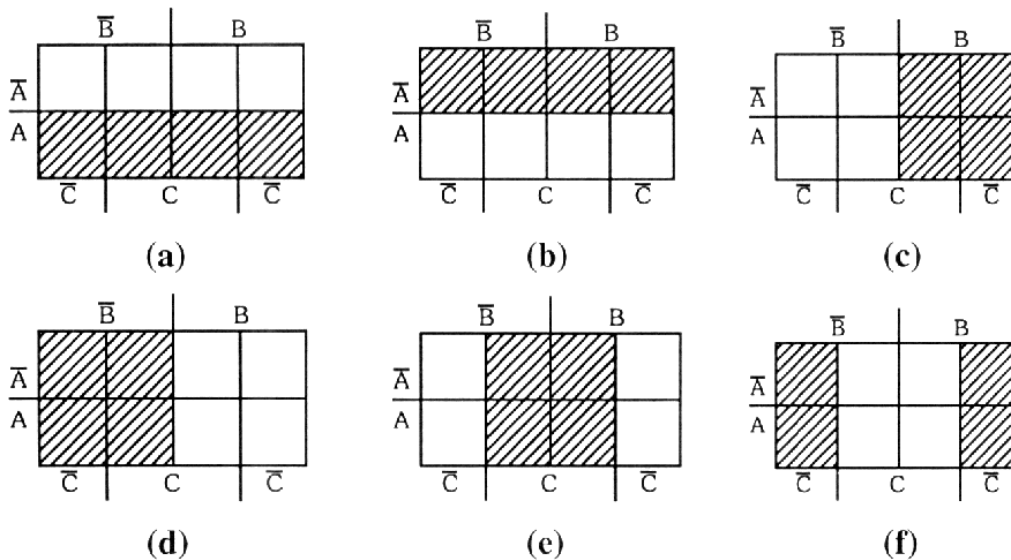


Figura 3.18 - Regiões do mapa de Veitch-Karnaugh:

- (a) Região na qual $A = 1$.
- (b) Região na qual $\bar{A} = 1 (A = 0)$.
- (c) Região na qual $B = 1$.
- (d) Região na qual $\bar{B} = 1 (B = 0)$.
- (e) Região na qual $C = 1$.
- (f) Região na qual $\bar{C} = 1 (C = 0)$.

Neste diagrama, também temos uma região para cada caso da tabela da verdade. A tabela 3.7 e a figura 3.19 mostram os casos para 3 variáveis e as respectivas localizações no mapa.

Caso	A	B	C
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1

Tabela 3.7

	$\bar{B}$		B
$\bar{A}$	Caso 0 0 0 0 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	Caso 1 0 0 1 $\bar{A}\bar{B}C$	Caso 3 0 1 1 $\bar{A}B\bar{C}$
A	Caso 4 1 0 0 $A\bar{B}\bar{C}$	Caso 5 1 0 1 $A\bar{B}C$	Caso 7 1 1 1 ABC
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

Figura 3.19

Vamos analisar a localização somente de uma das possibilidades, visto que as outras são de maneira análoga. Assim sendo, vamos localizar no diagrama o caso 3:

Caso	A	B	C
3	0	1	1

No diagrama, será a intersecção das regiões que:

$$A = 0 (\bar{A} = 1), B = 1 \text{ e } C = 1.$$

Esta pode ser chamada de região ABC. A figura 3.20 mostra esta localização no diagrama, para a colocação do respectivo caso de entrada da coluna S.

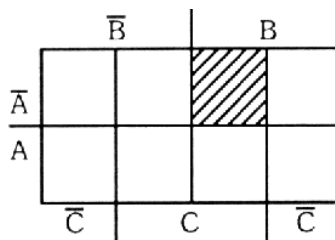


Figura 3.20

Para melhor compreensão, vamos, como exemplo, transpor para o diagrama as situações de saída da tabela 3.8.

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabela 3.8

Expressão extraída da tabela da verdade:

$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\overline{C} + ABC\overline{C}$$

Transpondo a tabela para o diagrama, temos:

	$\overline{B}$		B	
	Caso 0	Caso 1	Caso 3	Caso 2
$\overline{A}$	1	0	1	1
A	Caso 4	Caso 5	Caso 7	Caso 6
	1	0	0	1
	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	$\overline{C}$

Figura 3.21

Para efetuarmos a simplificação, seguimos o mesmo processo visto anteriormente, somente que, para 3 variáveis, os agrupamentos possíveis são os seguintes:

a) Oitava:

Agrupamento maximo, onde todas as localidades valem 1, A figura 3.22 apresenta esta situação:

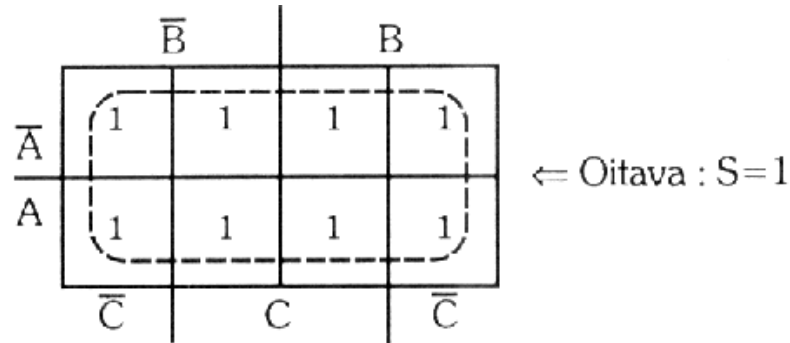


Figura 3.22

b) Quadras:

Quadras são agrupamentos de 4 regiões S é igual a 1, adjacentes ou em seqüência. Vamos agora formar - algumas quadras possíveis num diagrama de 3 variáveis, a título de exemplo:

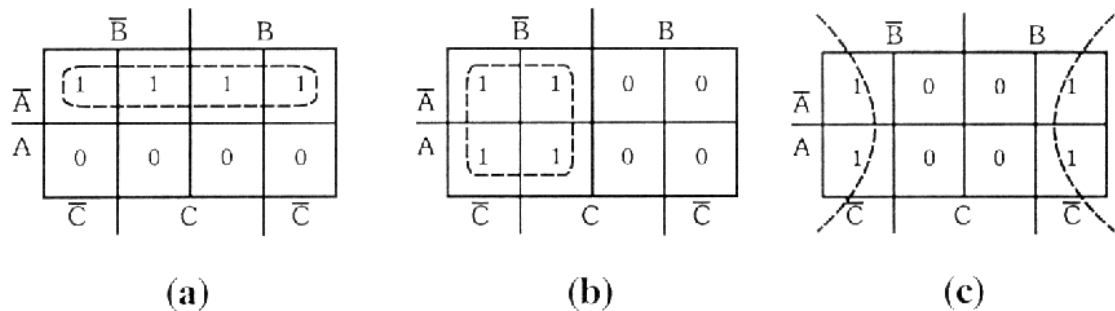


Figura 3.23 - (a) Quadra $\bar{A}$.

(b) Quadra $\bar{B}$.

(c) Quadra $\bar{C}$.

c) Pares:

A figura 3.24 apresenta como exemplo 2 pares entre os 12 possíveis em um diagrama de 3 variáveis:

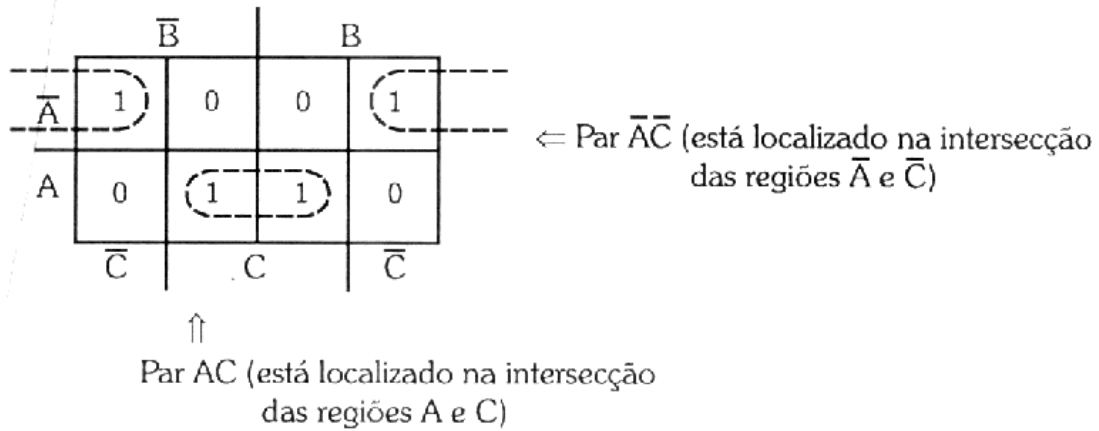


Figura 3.24

d) Termos isolados:

Na figura 3.25 ,exemplos de termos isolados que são os casos de entrada sem simplificação.

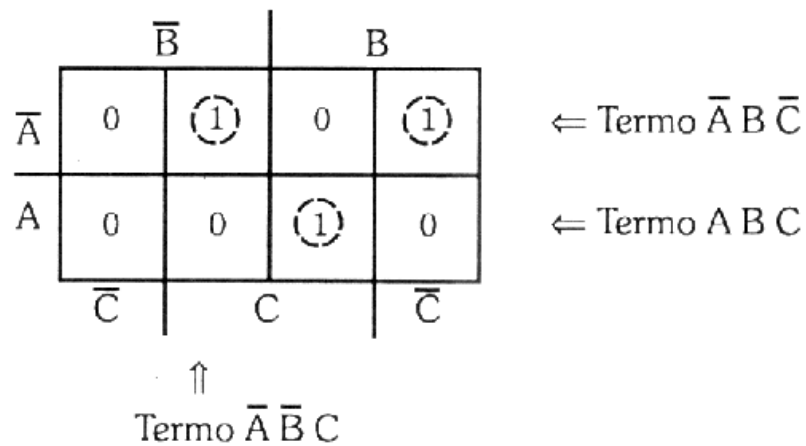


Figura 3.25

Para o exemplo agrupamos primeiramente uma quadra e logo após um par conforme mostra a figura 3.26.

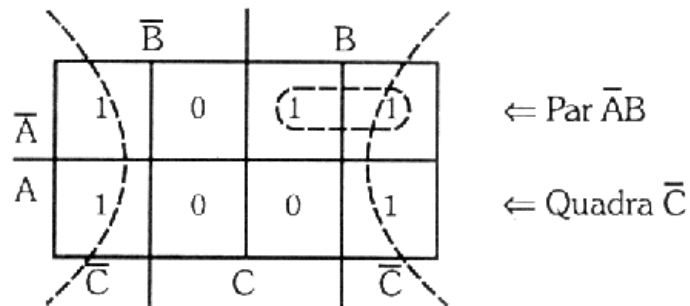


Figura 3.26

Notamos que esse par não depende de C pois está localizado tanto em C como em $\bar{C}$, resultando sua expressão independente de C ou seja o termo $\bar{A}B$.

O passo final é somarmos as expressões referentes aos agrupamentos. A expressão final minimizada será:

$$S = \bar{A}B + \bar{C}$$

Como outro exemplo, vamos minimizar o circuito que executa a tabela 3.9.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabela 3.9

Transpondo para o diagrama, temos:

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	1	1	0
A	1	1	0	1
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	C

Figura 3.27

Efetuada os agrupamentos, notamos que obtemos apenas 3 pares:

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$	0	(1 1)	0	
A	(1 1)	0	(1)	
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$	C

$\Leftarrow$ Par $\bar{A}C$
 $\Leftarrow$ Pares: $A\bar{C}$ e $A\bar{B}$

Figura 3.28

A expressão minimizada será:

$$S = \bar{A}C + A\bar{B} + A\bar{C}.$$

Poderíamos também ter agrupado de outra maneira, conforme mostra a figura 3.29.

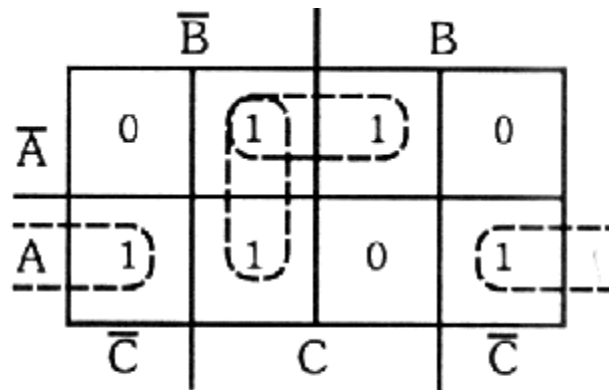


Figura 3.29

A expressão gerada:

$$S = \overline{A}C + A\overline{C} + \overline{B}C$$

Estas duas expressões, aparentemente deferentes, possuem o mesmo comportamento em cada possibilidade, fato este comprovado, levantando-se as respectivas tabelas da verdade.

Diagrama de Veitch-Karnaugh para 4 Variáveis

O diagrama para 4 variáveis é visto na figura 3.30.

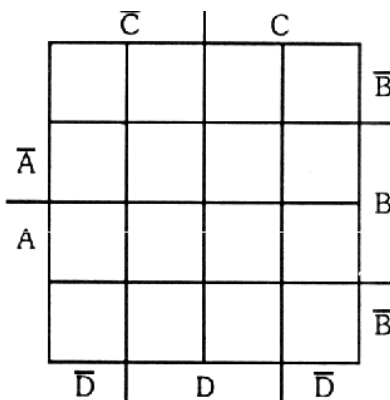
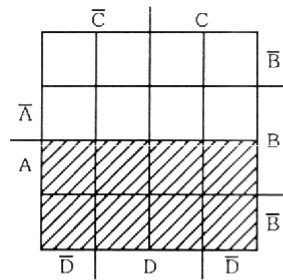
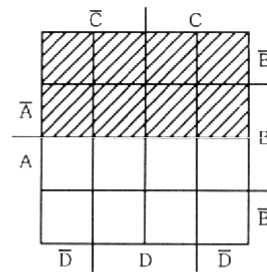


Figura 3.30

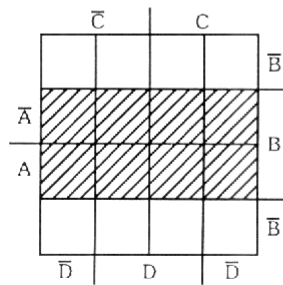
A figura 3.31 mostra as regiões assumidas pelas variáveis A, B, C e D



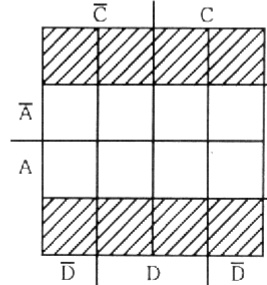
(a) Região onde $A = 1$.



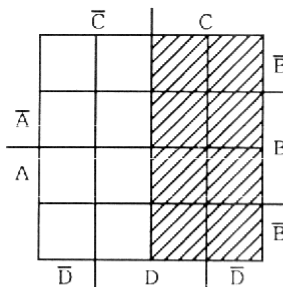
(b) Região onde $\bar{A} = 1$ ($A = 0$).



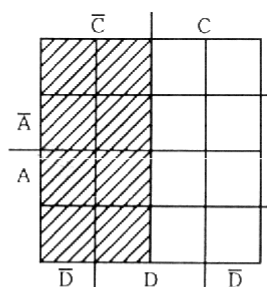
(c) Região onde $B = 1$.



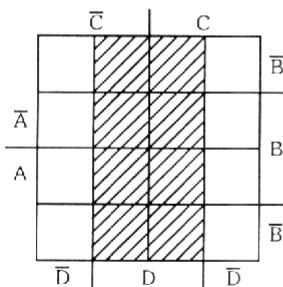
(d) Região onde $\bar{B} = 1$ ($B = 0$).



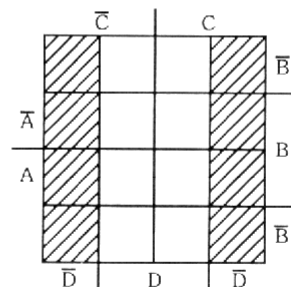
(e) Região onde $C = 1$.



(f) Região onde $\bar{C} = 1$ ($C = 0$).



(g) Região onde $D = 1$.



(h) Região onde $\bar{D} = 1$ ($D = 0$).

Figura 3.31

Neste tipo de diagrama, também temos uma região para cada caso da tabela da verdade, como podemos verificar no diagrama completo, figura 3.32.

Casos	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

Tabela 3.10

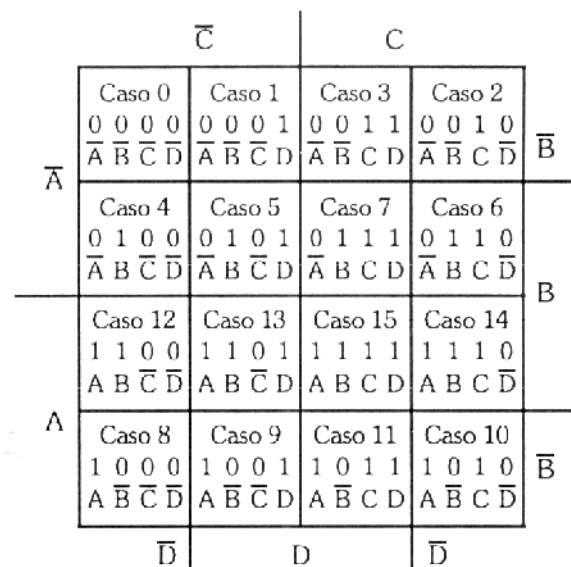


Figura 3.32

Vamos analisar a colocação de uma das possibilidades.

Como exemplo, o caso 8.

$$A \bar{B} \bar{C} \bar{D} \rightarrow 1000$$

$$A = 1, B = 0 (\bar{B} = 1), C = 0 (\bar{C} = 1) \text{ e } D = 0 (\bar{D} = 1)$$

Da intersecção dessas regiões, obtemos a região $A \bar{B} \bar{C} \bar{D}$, que é o caso 8.

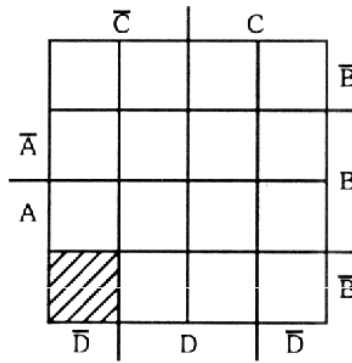


Figura 3.33

Para esclarecermos melhor a colocação do diagrama e analisarmos outros casos, vamos transpor para o mesmo a tabela 3.11.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Tabela 3.11

Expressão de S, extraída da tabela da verdade:

$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$$

Transpondo a tabela para o diagrama, temos:

		$\bar{C}$		C		
		0	1	1	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$	0	1	1	0		
A	1	1	1	0		B
	1	1	1	0		$\bar{B}$
	$\bar{D}$		D	$\bar{D}$		

Figura 3.34

Para efetuarmos a simplificação, seguimos o mesmo processo para os diagramas de 3 variáveis, somente que neste caso, o principal agrupamento será a oitava.

Devemos ressaltar aqui, que no diagrama, os lados extremos opostos se comunicam, ou seja, podemos formar oitavas, quadras e pares com os termos localizados nos lados extremos opostos.

Vamos, como exemplo, verificar alguns desses casos no diagrama:

a) Exemplos de pares:

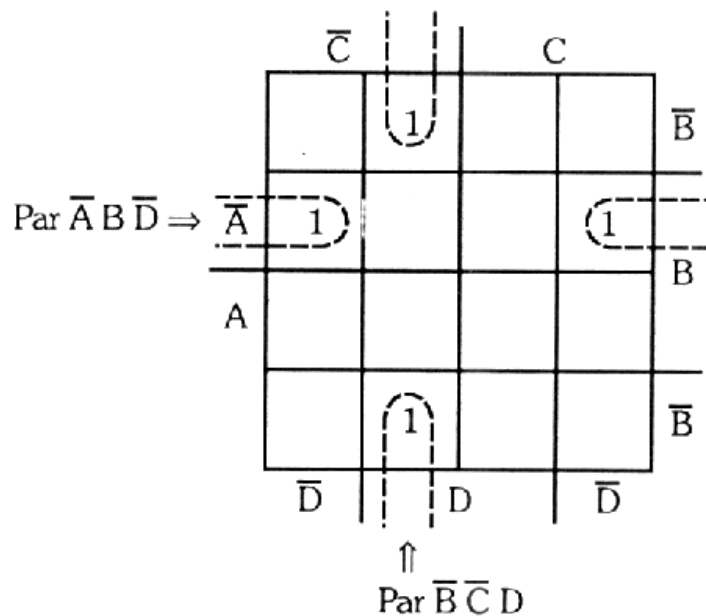


Figura 3.35

b) Exemplos de quadras:

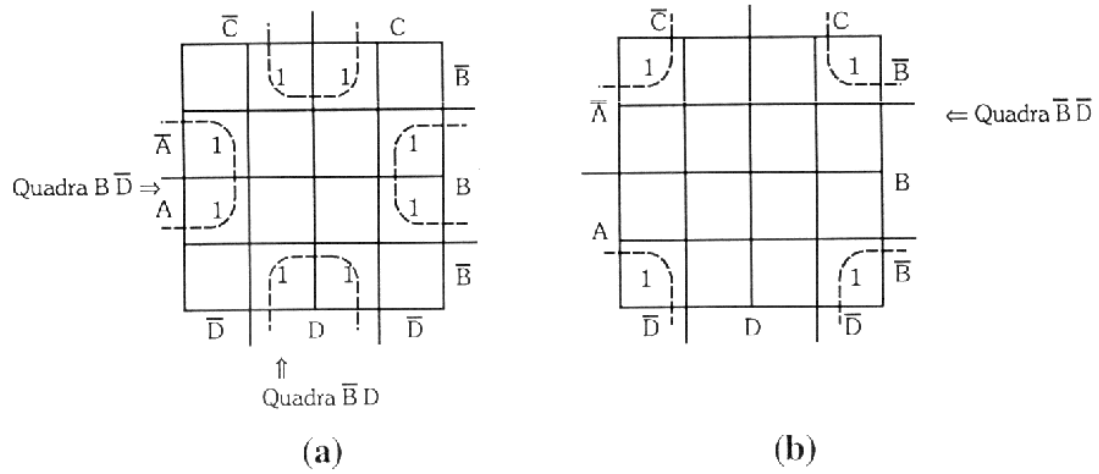


Figura 3.36

c) Exemplos de oitavas:

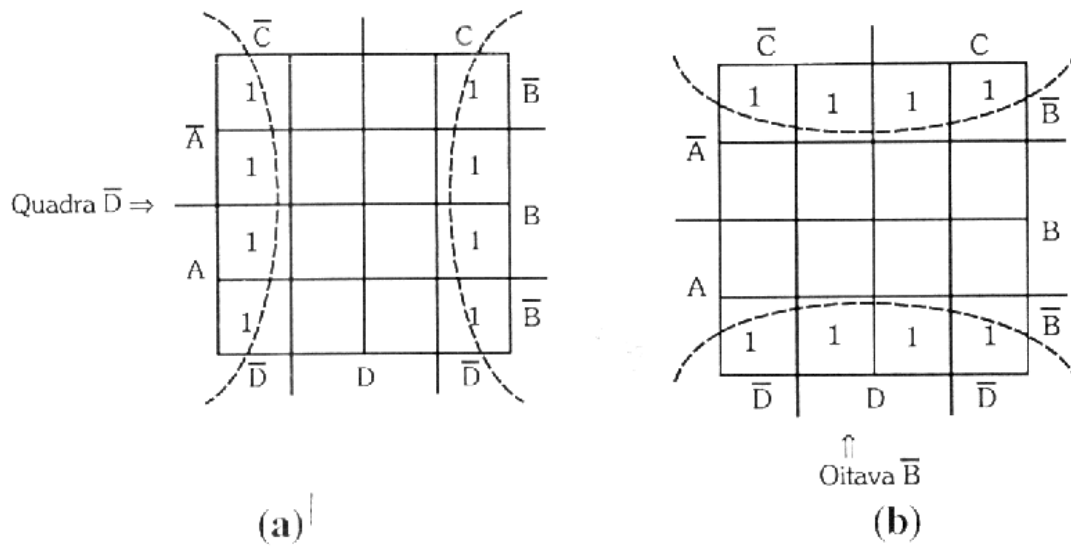


Figura 3.37

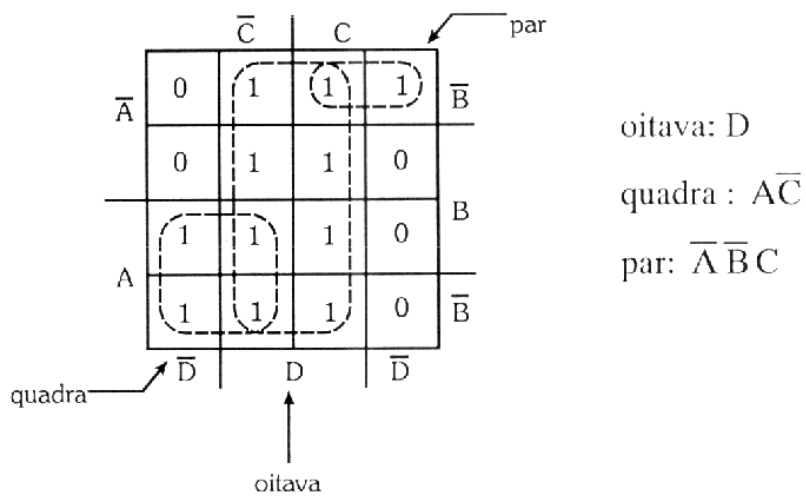


Figura 3.38

Somando as expressões, teremos a expressão final minimizada:

$$S = D + \bar{A}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$$

Como outro exemplo, vamos minimizar o circuito que executa a tabela.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Tabela 3.12

Transpondo a tabela da verdade para o diagrama, temos:

		$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	$\bar{B}$	0	1	1	0	
	B	1	1	1	1	
A	$\bar{B}$	0	0	1	0	
	B	0	0	0	1	
		$\bar{D}$		D	$\bar{D}$	

Figura 3.39

No diagrama, temos: 2 quadras, 1 par e 1 termo isolado.

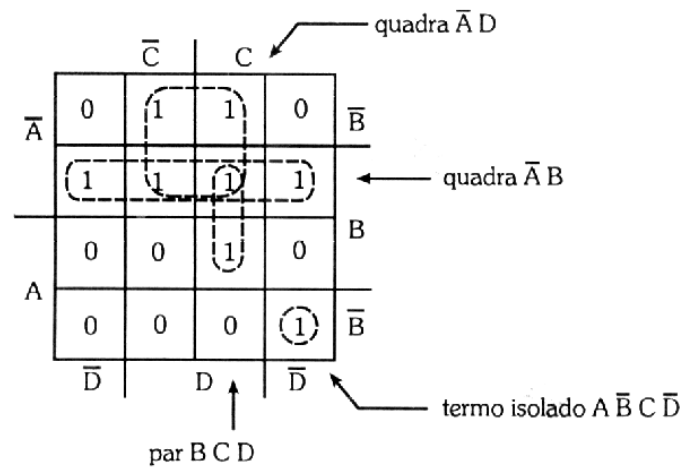


Figura 3.40

A expressão minimizada de S será a soma de todos esses agrupamentos:

$$S = A \bar{B} C \bar{D} + B C D + \bar{A} B + \bar{A} D$$

Exercícios Resolvidos

1- Simplifique as expressões obtidas das tabelas a seguir, utilizando os diagramas de Veitch-Karnaugh.

a)

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabela 3.13

Transpondo para o diagrama de 3 variáveis e reconhecendo os agrupamentos, temos:

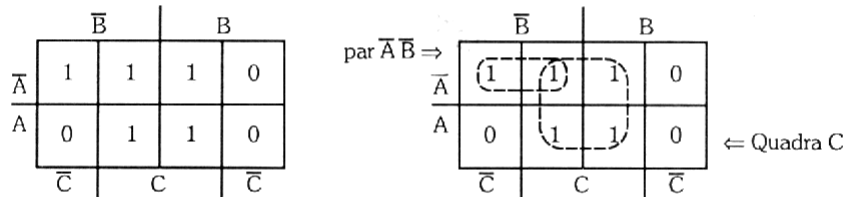


Figura 3.41

A expressão minimizada será: $S = C + \bar{A} \bar{B}$

b)

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tabela 3.14

Transpondo para o diagrama e agrupando, temos:

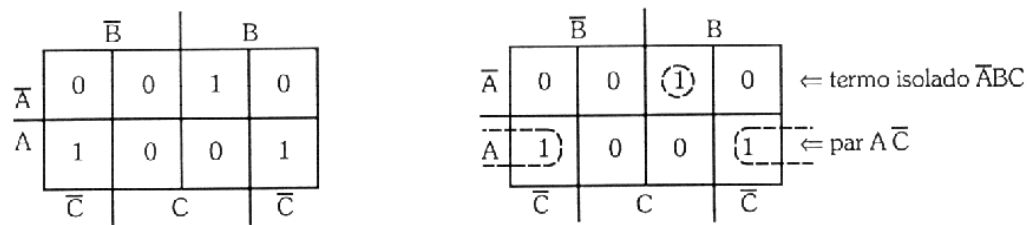


Figura 3.42

$$\therefore S = A\bar{C} + \bar{A}BC$$

c)

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Tabela 3.15

Transpondo da tabela para o diagrama, temos:

		$\bar{C}$		C		
		1	0	0	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$		1	1	1	1	B
A		1	0	1	1	
		1	0	0	1	$\bar{B}$
		$\bar{D}$	D	$\bar{D}$		

Figura 3.43

Agrupando o diagrama, temos:

	$\bar{C}$	C				
	1	0	0	1	$\bar{B}$	$\Leftarrow$ oitava $\bar{D}$
$\bar{A}$	1	1	1	1		
A	1	0	1	1	B	$\Leftarrow$ quadras: $\bar{A}B$ e BC
	1	0	0	1	$\bar{B}$	
	$\bar{D}$	D	$\bar{D}$			

Figura 3.44

A expressão minimizada será: $S = \bar{A}B + BC + \bar{D}$.

d)

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0

Tabela 3.16 (parte)

A	B	C	D	S
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Tabela 3.16

Transpondo para o diagrama, temos:

	$\bar{C}$	C	
	1	1	0
$\bar{A}$	1	0	1
A	0	0	1
	0	0	1
	$\bar{D}$	D	$\bar{D}$

Figura 3.45

Podemos agrupar da seguinte maneira:

	$\bar{C}$	C	
	1	1	0
$\bar{A}$	1	0	1
A	0	0	1
	0	0	1
	$\bar{D}$	D	$\bar{D}$

Figura 3.46

Neste diagrama, temos 5 pares gerando a expressão:

$$S = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}B\overline{D} + ACD + A\overline{B}C$$

Também podemos agrupar desta outra maneira:

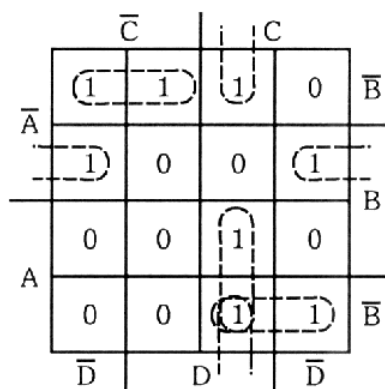


Figura 3.47

Da mesma forma, gerando a expressão:

$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}CD + ACD + A\overline{B}C$$

Podemos notar que simplificamos a expressão S por dois modos de agrupamentos, obtendo dois resultados aparentemente diferentes. Se analisarmos esses resultados nas respectivas tabelas da verdade, veremos que terão o mesmo comportamento.

Expressão simplificada de S :

$$S = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}B\overline{D} + ACD + A\overline{B}C$$

ou

$$S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{D} + \overline{B}CD + ACD + A\overline{B}C$$

2 - Minimize as expressões a seguir, utilizando os diagramas de VeitchKarnaugh:

a) $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

Colocando os termos diretamente no diagrama, temos:

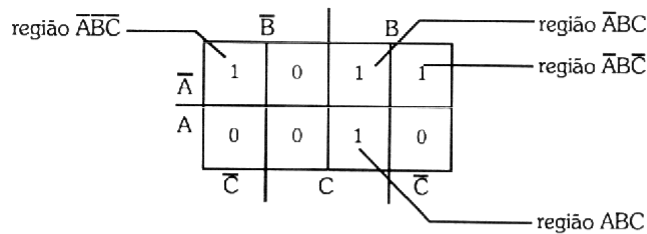


Figura 3.48

Temos, neste diagrama, 2 pares:

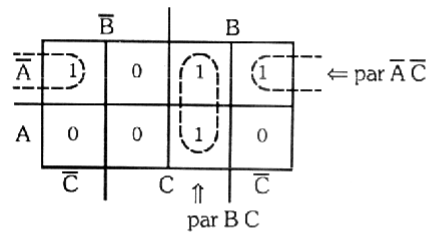


Figura 3.49

A expressão minimizada será: $S = \overline{A}\overline{C} + BC$

b) $S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}D + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}\overline{B}CD + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD$

Transportando diretamente a expressão para o diagrama, temos:

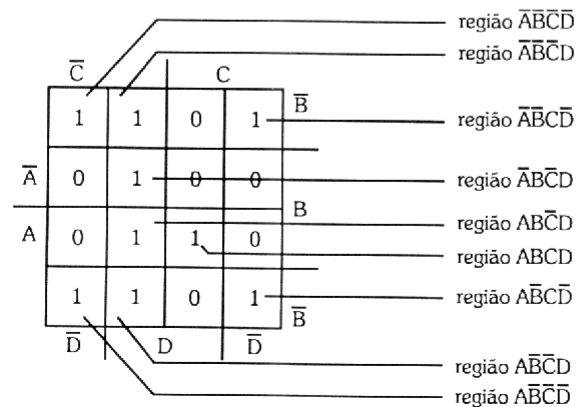


Figura 3.50

Agrupando os termos no diagrama, temos:

quadra

$\overline{B}\overline{D} \Rightarrow$

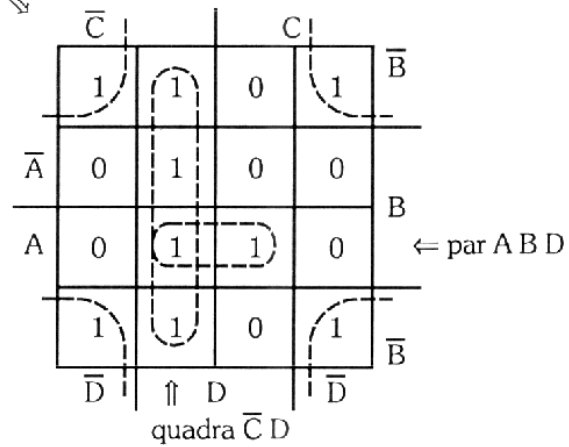


Figura 3.51

A expressão simplificada será: $S = ABD + \overline{C}D + \overline{B}\overline{D}$

$$\text{c) } S = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}\overline{D} \\ + A\overline{B}C\overline{D} + AB\overline{C}\overline{D} + ABC\overline{D} + ABCD$$

Passando a expressão para o diagrama, temos:

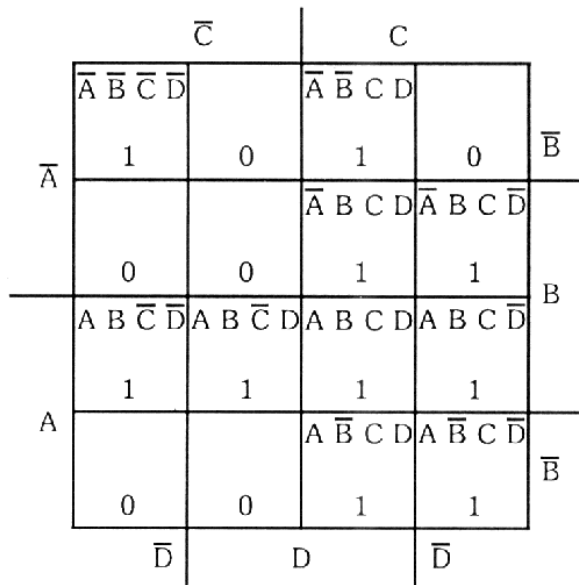


Figura 3.52

Efetutando os agrupamentos, temos:

1 termo isolado: $\overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D}$

4 quadras: AB, CD, BC e AC

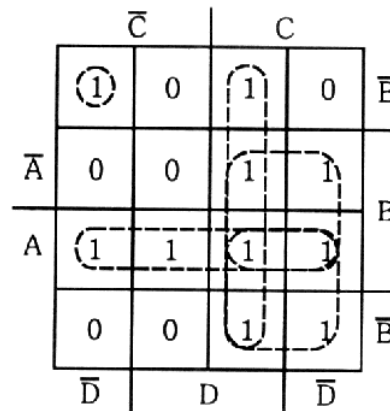


Figura 3.53

É importante ressaltar que uma oitava agrupada representa maior simplificação que uma quadra, e uma quadra agrupada maior simplificação que um par, e este, maior simplificação que um termo isolado. Assim sendo, deve-se preferir agrupar em oitavas, e se não for possível, em quadras e também se não for possível, em pares, mesmo que alguns casos já tenham sido considerados em outros agrupamentos, lembrando sempre, que devemos ter o menor número de agrupamentos possível.

A expressão final minimizada será:

$$S = \overline{A} \overline{B} \overline{C} \overline{D} + AB + CD + BC + AC$$

Diagrama para 5 Variáveis

O diagrama de Veitch-Karnaugh para simplificar expressões com 5 variáveis de entrada é visto na figura 3.54.

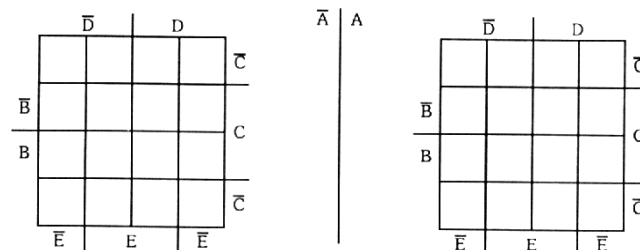


Figura 3.54

Vamos verificar alguma.s das regiões deste diagrama:

a) Região onde $A = 1$:

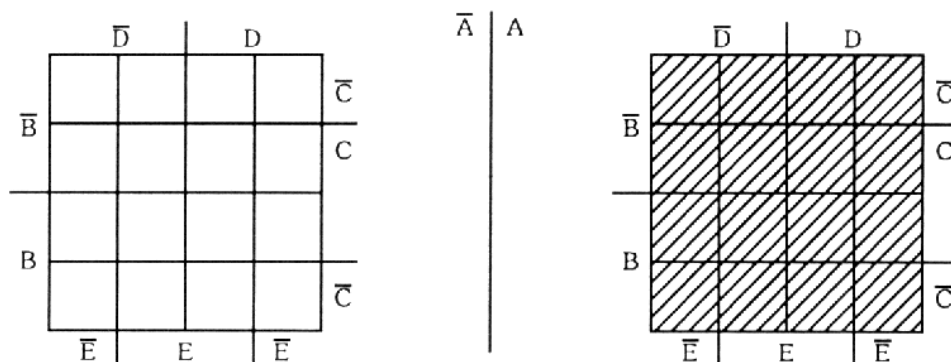


Figura 3.55

b) Região onde $B = 1$:

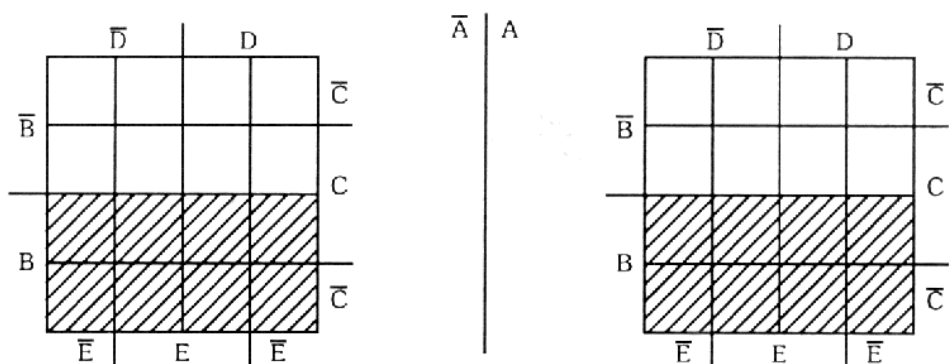


Figura 3.56

c) Região onde $C = 1$:

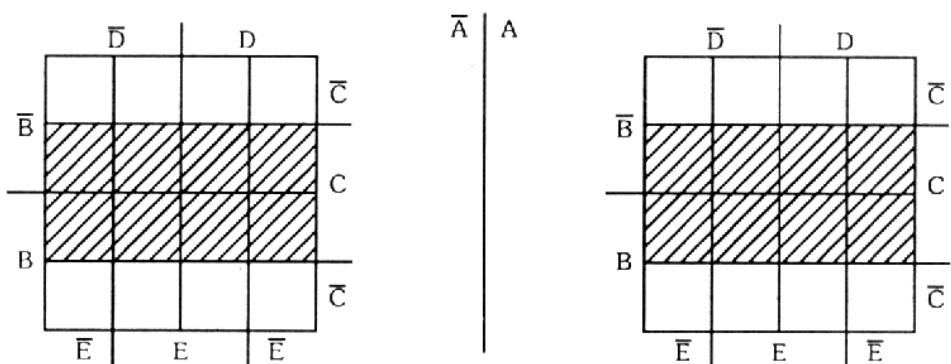


Figura 3.57

d) Região onde $D = 1$:

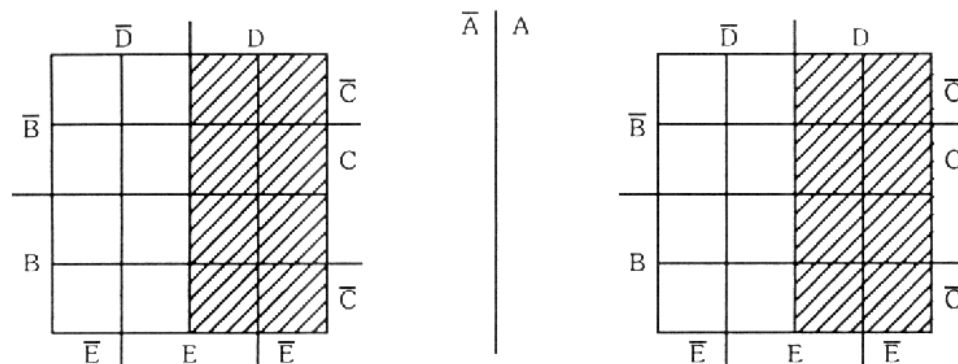


Figura 3.58

e) Região onde $E = 1$:

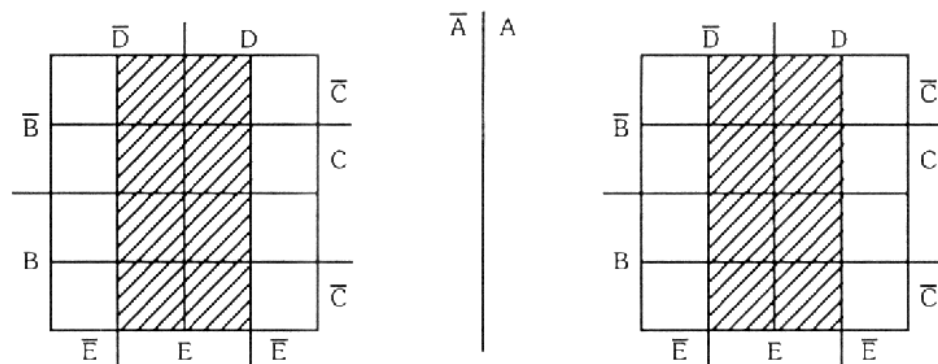


Figura 3.59

De forma análoga, o diagrama possui as regiões relativas às variáveis opostas às mostradas, ou seja $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ e $\bar{E}$. Todas estas regiões denominam-se hexas. A colocação de uma condição, neste diagrama, faz-se de maneira análoga às anteriores.

Vamos verificar a região onde:

$$A = 1, B = 0, C = 1, D = 0 \text{ e } E = 0,$$

$$\text{Então: } A \bar{B} C \bar{D} \bar{E}$$

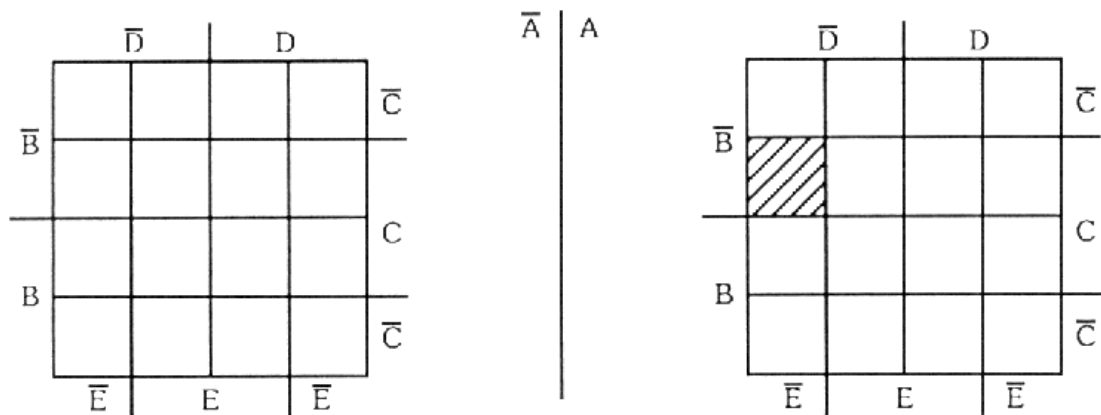


Figura 3.60

Para efetuarmos a simplificação num diagrama de 5 variáveis, devemos tentar primeiramente em hexas, em seguida em oitavas, em quadras, em pares e por último em termos isolados

Para visualizarmos melhor as hexas, oitavas, quadras e pares, devemos enxergar o diagrama da esquerda sobreposto ao da direita, conforme mostra a figura 3.61.

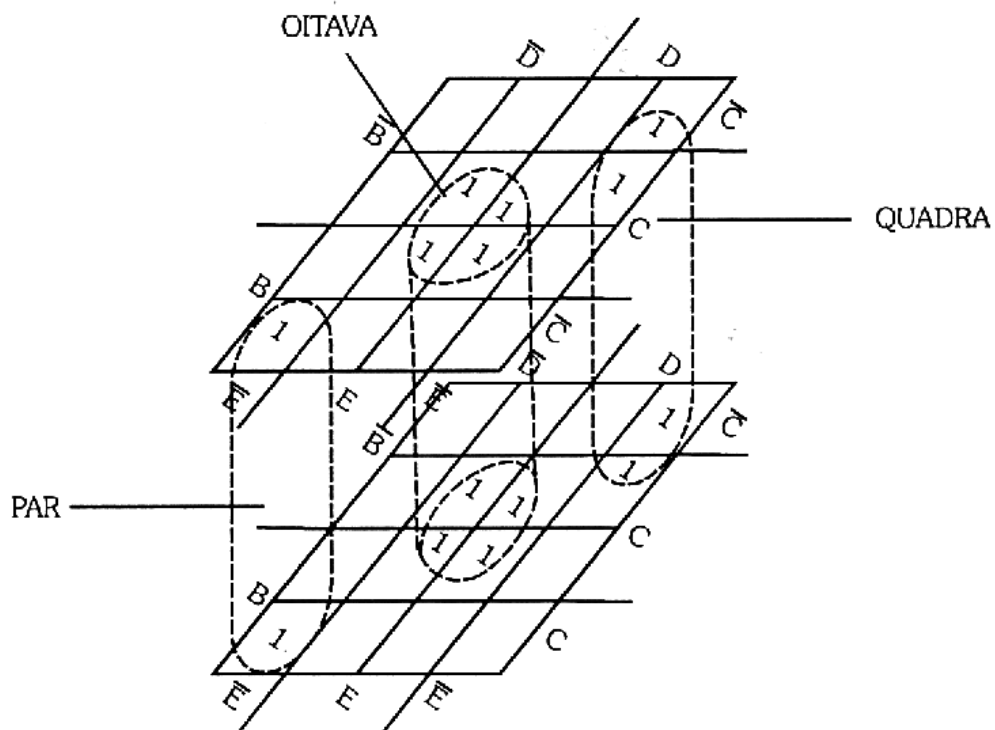


Figura 3.61

Podemos visualizar, por exemplo, que o par, a oitava e a quadra formam-se nos dois planos.

Vamos, agora fazer a transposição e a simplificação da tabela 3.17, para melhor entendimento destes conceitos.

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Tabela 3.17

Transpondo para o diagrama, temos:

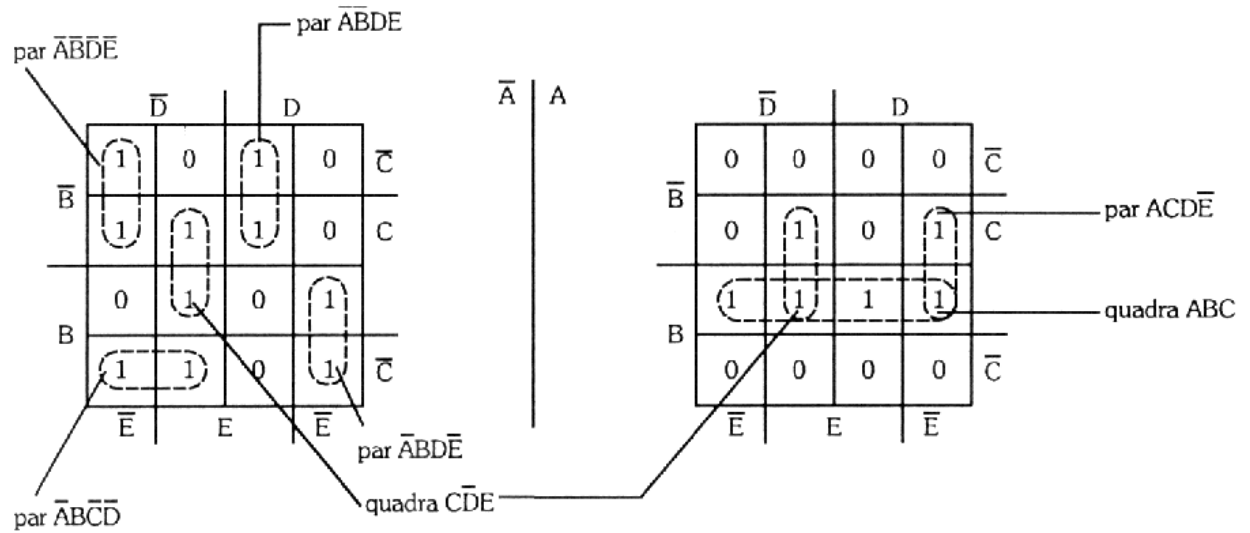


Figura 3.62

Resumindo os agrupamentos obtidos, temos:

$$2 \text{ quadras: } \begin{cases} C\bar{D}E \\ ABC \end{cases}$$

$$5 \text{ pares: } \begin{cases} \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}B\bar{C}\bar{D} \\ \bar{A}B\bar{D}\bar{E} \\ \bar{A}\bar{B}DE \\ AC\bar{D}\bar{E} \end{cases}$$

A expressão minimizada será:

$$S = C\bar{D}E + ABC + \bar{A}\bar{B}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}DE + AC\bar{D}\bar{E}$$

Exercício Resolvido

Simplifique a expressão da tabela 3.18.

A	B	C	D	E	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Tabela 3.18

Numerando os casos das 32 possibilidades das 5 variáveis de 0 a 31, obtemos a localização no diagrama, vista na figura 3.63.

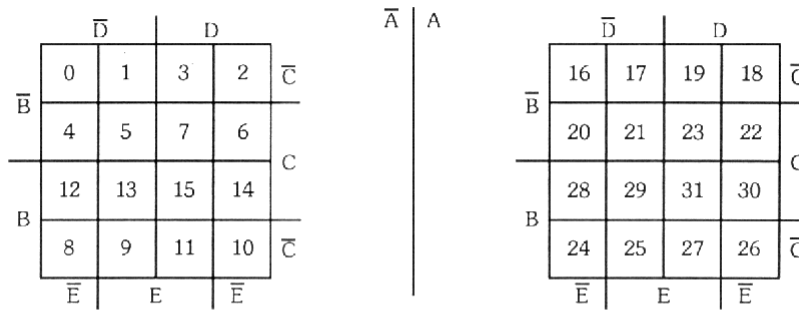


Figura 3.63

Colocando os casos no diagrama, temos:

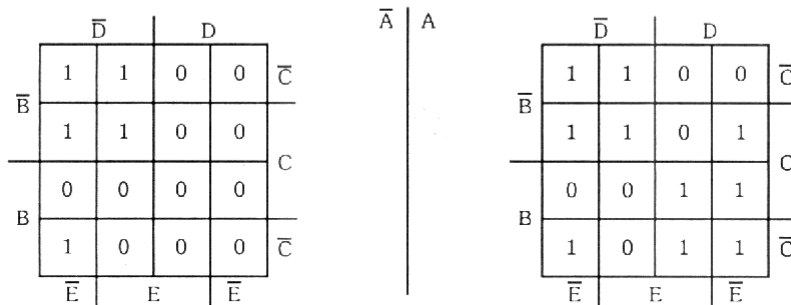


Figura 3.64

Os agrupamentos para obtenção da expressão final simplificada são vistos na figura 3.65.

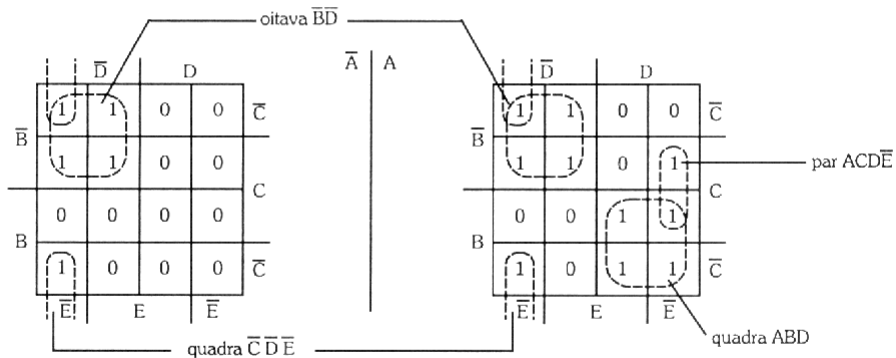


Figura 3.65

A expressão simplificada será: $S = \bar{B}\bar{D} + \bar{C}\bar{D}\bar{E} + ABD + ACDE$.

Diagramas com Condições Irrelevantes

Chamamos de condição irrelevante (X) a situação de entrada onde a saída pode assumir 0 ou 1 indiferentemente. Esta condição ocorre principalmente pela impossibilidade prática do caso de entrada acontecer, para sua utilização em diagramas de Veitch-Karnaugh, devemos, para cada condição irrelevante, adotar 0 ou 1, dos dois, aquele que possibilitar melhor agrupamento e conseqüentemente maior simplificação.

Para esclarecer este processo, vamos utilizar a tabela 3.19.

A	B	C	S
0	0	0	X
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Tabela 3.19

Transpondo esta tabela para o diagrama, temos

	$\bar{B}$	B	
$\bar{A}$	X	1	1
A	0	0	0
	$\bar{C}$	C	$\bar{C}$

Figura 3.66

O símbolo (X) indica que neste caso a saída pode assumir 0 ou 1, indiferentemente, pois, ou a situação de entrada é impossível de acontecer, ou, ainda, possibilita qualquer dos 2 valores na saída. Para fins de simplificação, devemos adotar $X = 1$, pois assim sendo, agrupamos uma quadra, ao invés de 2 pares (no caso de $X = 0$), representando uma maior simplificação da expressão de saída:

$$S = \overline{A}$$

Convém ressaltar que, em uma tabela da verdade, podemos ter várias condições irrelevantes que devem ser consideradas independentemente, conforme agrupamento em que se encontram. Para exemplificar, vamos simplificar a expressão extraída da tabela 3.20.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	X
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	X
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	X
1	1	1	0	0
1	1	1	1	X

Tabela 3.20

Passando para o diagrama de 4 variáveis, temos:

	$\bar{C}$		C		
$\bar{A}$	X	0	X	1	$\bar{B}$
	1	0	1	1	
	0	X	X	0	B
A	0	1	0	X	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D		$\bar{D}$	

Figura 3.67

O próximo passo é agrupar as regiões que valem 1, utilizando a condição irrelevante (X) para completar o agrupamento. Convém lembrar que, para maior simplificação, devemos ter um número mínimo de agrupamentos, cada um deles, porém, com o maior número de células possível. Assim sendo, temos:

	$\bar{C}$		C			
			↓ quadra $\bar{A}C$			
$\bar{A}$	X	0	X	1	$\bar{B}$	
	1	0	1	1		← Quadra $\bar{A}\bar{D}$
	0	X	X	0	B	
A	0	1	0	X	$\bar{B}$	
	$\bar{D}$	↑ par $A\bar{C}D$		$\bar{D}$		

Figura 3.68

A expressão composta por 2 quadras e um par:

$$S = \overline{A}C + \overline{A}\overline{D} + A\overline{C}D$$

Exercícios Resolvidos

- 1 - A tabela 3.21 representa as possibilidades de saída obtidas de um projeto envolvendo 3 variáveis A, B e C. Determine a expressão simplificada.

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	X
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	X
1	1	1	X

Tabela 3.21

A figura 3.69 apresenta a colocação dos valores da tabela no diagrama (a) e os respectivos agrupamentos para a obtenção da expressão simplificada (b).

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	1	X	1	0
A	X	1	X	X
	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	C

(a)

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	1	X	1	0
A	X	1	X	X
	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	C

(b)

Figura 3.69

A expressão simplificada será composta pelas 2 quadras obtidas:
 $S = \overline{B} + C$.

2- Simplifique a expressão representativa da tabela 3.22.

A	B	C	D	S
0	0	0	0	1
0	0	0	1	X
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	X
1	0	1	1	1
1	1	0	0	X
1	1	0	1	1
1	1	1	0	X
1	1	1	1	0

Tabela 3.22

Passando os valores da tabela para o diagrama, temos:

	$\bar{C}$		C		
	1	X	0	1	$\bar{B}$
$\bar{A}$	1	1	0	1	B
A	X	1	0	X	
	1	0	1	X	$\bar{B}$
	$\bar{D}$	D		$\bar{D}$	

Figura 3.70

Logo após, efetuamos os agrupamentos visando obter a expressão simplificada de forma máxima:

	$\bar{C}$	C		
	1	X	0	1
$\bar{A}$	1	1	0	1
A	X	1	0	X
	1	0	1	X
$\bar{D}$	D	$\bar{D}$		

Figura 3.71

Como resultado, obtemos a oitava $\bar{D}$, a quadra BC e o par ABC , gerando a expressão: $S = \bar{D} + BC + ABC$.

É importante observar que se tivéssemos agrupado precipitadamente, ao início do exercício a quadra $\bar{A}\bar{C}$, gerariamos erradamente um termo a mais na expressão final.

Para melhor condução do processo de agrupamento devemos iniciar sempre pelos agrupamentos obrigatórios e bem definidos.

Casos que não Admitem Simplificação

Vamos, efetuar uma análise das expressões representativas das funções OU Exclusivo e Coinidência.

A figura 3.72 mostra a colocação destas expressões nos diagramas, no caso de 2 variáveis.

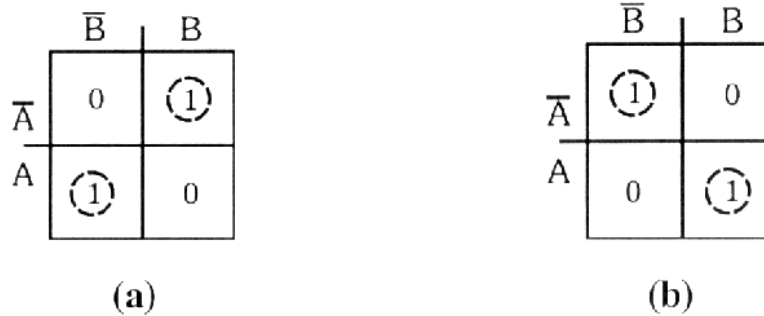


Figura 3.72

$$(a) S = A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$(b) S = A \odot B = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Pela figura, notamos que as expressões encontram-se na forma de máxima simplificação, não havendo outra possibilidade, pois em cada diagrama temos 2 termos isolados que são as próprias expressões de entrada.

No caso de utilizarmos 3 variáveis, as expressões são, respectivamente, $S = A \oplus B \oplus C$ e $S = A \odot B \odot C$. Para levantarmos suas tabelas da verdade, devemos tomar as variáveis de 2 em 2, ou seja, efetuar primeiro as operações entre 2 das variáveis e com o resultado obtido efetuar a operação com a terceira variável. Esse processo se deve ao fato de as funções OU Exclusivo e Coinidência não serem válidas para mais de 2 variáveis de entrada, podendo ser aplicado, tomando primeiramente 2 quaisquer das 3 variáveis da expressão, indiferentemente. As tabelas 3.23 e 3.24 mostram os resultados das operações $S = A \oplus B \oplus C$ e $S = A \odot B \odot C$, em todas as possibilidades.

A	B	C	$(A \oplus B) \oplus C$	$A \oplus (B \oplus C)$	$(A \oplus C) \oplus B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabela 3.23

A	B	C	$(A \odot B) \odot C$	$A \odot (B \odot C)$	$(A \odot C) \odot B$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Tabela 3.24

Passando a coluna S (iguais em todos os casos) para o diagrama, temos

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	0	1	0	1
A	1	0	1	0
	$\overline{C}$	C	$\overline{C}$	

Figura 3.73

Da mesma forma, temos apenas termos isolados, não havendo possibilidade de simplificação.

Extraindo a expressão da tabela inicial ou do diagrama, temos:

$$S = \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} \overline{C} + ABC$$

Evidenciando $\overline{A}$ e A temos:

$$S = \overline{A}(\overline{B}C + B\overline{C}) + A(\overline{B}\overline{C} + BC)$$

Substituindo-se os parênteses respectivamente por:

$$S = \overline{A} (B \oplus C) + A (B \odot C)$$

Como $B \odot C = \overline{B \oplus C}$ reescrevemos:

$$S = \overline{A}(B \oplus C) + A (\overline{B \oplus C})$$

Chamando $(B \oplus C)$ de X , temos:

$$S = \overline{A}X + A\overline{X} = A \oplus X$$

Substituindo X , temos:

$$S = A \oplus B \oplus C$$

Inicialmente, se tivéssemos evidenciado outras variáveis, teríamos outras ordens no resultado, de conformidade com as tabelas levantadas. Ainda, se tivéssemos substituído $B \oplus C$ por $\overline{B \odot C}$ obteríamos $S = A \odot B \odot C$, que analogamente, conforme as tabelas é equivalente a:

$$S = A \oplus B \oplus C$$

Se estendermos o estudo para mais variáveis, obteremos:

Para 4 variáveis: $S = A \sim B \wedge C \wedge D$

$$\text{Para 4 variáveis: } S = \overline{A \oplus B \oplus C \oplus D} = A \odot B \odot C \odot D$$

$$\text{Para 5 variáveis: } S = A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus E = A \odot B \odot C \odot D \odot E$$

De posse dos resultados, concluímos que para um número de par de variáveis, temos a função OU Exclusivo como sendo o complemento da função Coincidência e para um número ímpar de variáveis temos a função OU Exclusivo como sendo igual à função Coincidência.

Agrupamentos de Zeros

Podemos, alternativamente, agrupar as células que valem 0 para obtermos a expressão simplificada em diagramas de Veitch-Karnaugh, porém, com esta prática, obtemos o complemento da função, ou seja, a saída $\bar{S}$. Para ilustrar esta situação, vamos simplificar a expressão da tabela 3.25.

A	B	C	S
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tabela 3.25

Passando para o diagrama e efetuando o agrupamento, temos:

	$\overline{B}$		B	
$\overline{A}$	0	1	1	0
A	1	1	1	1
	$\overline{C}$		C	

Figura 3.74

Pela figura notamos que obtemos um par formado por zeros. Conforme o exposto, a expressão será:

$$\overline{S} = \overline{A} \overline{C}, \text{ sendo } S = \overline{(\overline{A} \overline{C})}$$

Aplicando o teorema De Morgan a esta:

$$S = \overline{(\overline{A} \overline{C})} = A + C.$$

$$\therefore S = A + C$$

Convém observar que a mesma expressão seria obtida, resultado dos agrupamentos de 2 quadras, se houvéssemos utilizado o procedimento convencional anteriormente visto.

Outra Forma de Apresentação do Diagrama de Veitch-Karnaugh

Ao invés de representarmos o diagrama dividindo-o em regiões, como visto até aqui, podemos representá-lo de uma forma análoga, conforme a figura 3.75.

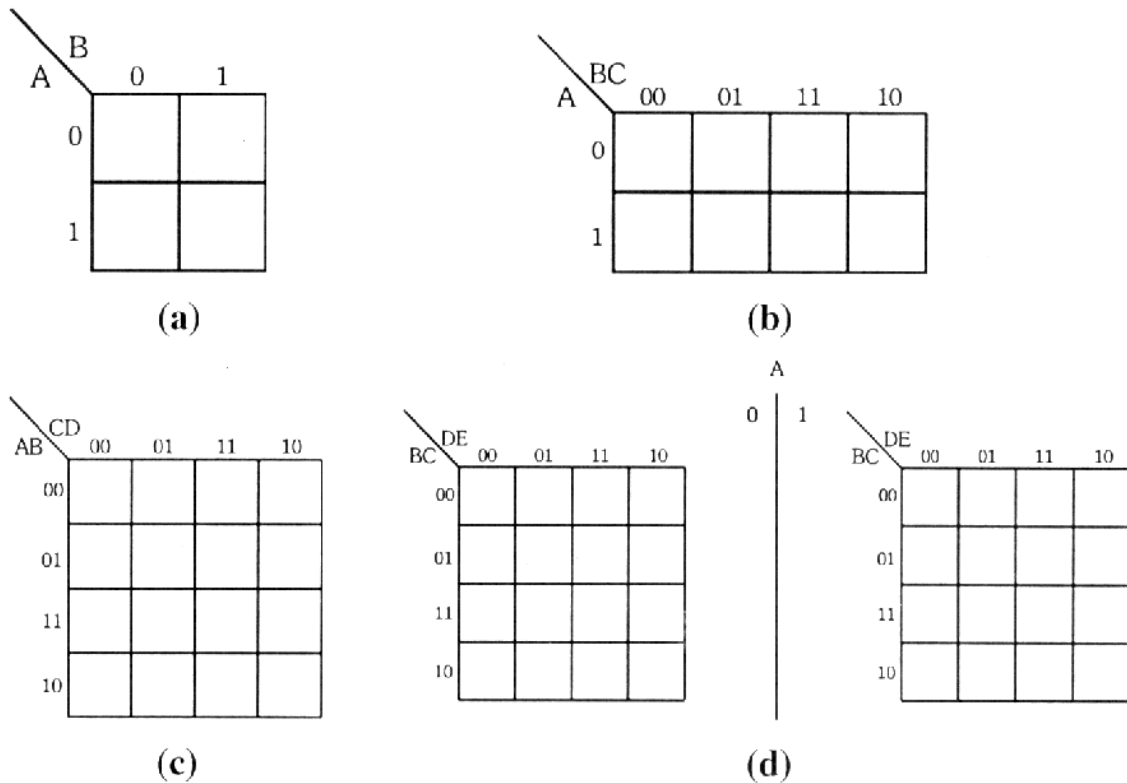


Figura 3.75 - (a) 2 variáveis.

(b) 3 variáveis.

(c) 4 variáveis.

(d) 5 variáveis.

Pela figura, podemos notar que os diagramas são semelhantes, possuindo apenas a identificação das regiões pelo valor assumido pela variável

$$A=0 \Rightarrow \text{região } \overline{A}, A = 1 \Rightarrow \text{região } A$$

Tanto a colocação dos casos, bem como os agrupamentos obtidos se fazem de maneira análoga, levando aos mesmos resultados. A figura 3.76 apresenta os dois estilos dos diagramas de quatro variáveis sobrepostos, onde se observam claramente os níveis assumidos pelas variáveis, idênticos para ambos os mapas.

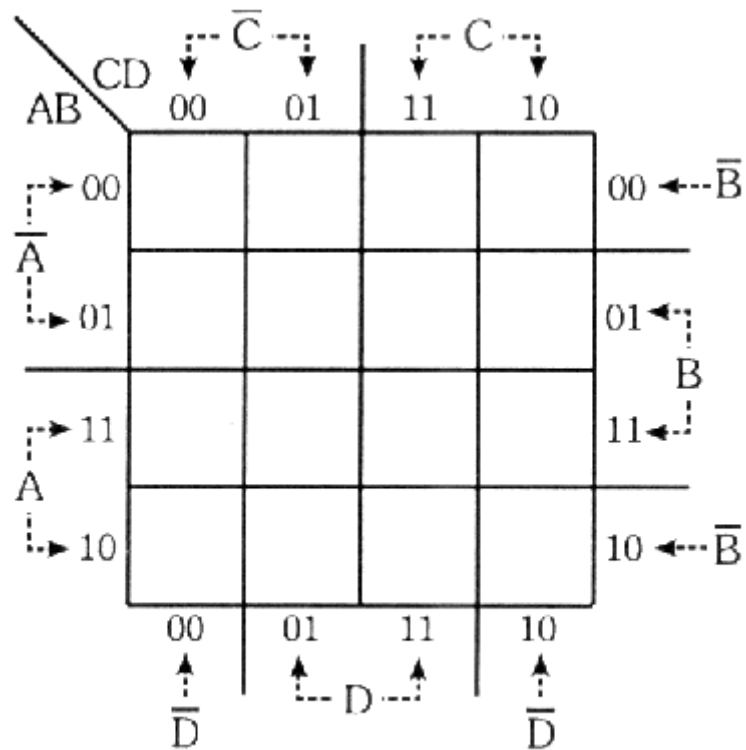


Figura 3.76

Exercícios Propostos

3.10.1 - Simplifique cada expressão, utilizando a Álgebra de Boole.

$$\text{a) } S = A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C + ABC + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

$$\text{b) } S = ABCD + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + ABC\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + ABCD$$

3.10.2 - Simplifique utilizando a Álgebra de Boole:

$$S = \overline{[(\overline{\overline{B} + \overline{C} + \overline{D}})(\overline{\overline{A} + B + C}) + C]} + \overline{A}\overline{B}C + \overline{B}(\overline{A + C})$$

3.10.3 - Idem, para a expressão:

$$S = A[\overline{\overline{B}(\overline{C + D})} + \overline{\overline{A}(\overline{B + C})}] + C\overline{D} + A\overline{B}C + AB$$

3.10.4 - Idem, para a expressão:

$$S = \overline{(A \oplus B + \overline{B}C\overline{D})} [\overline{D} + \overline{B}C + D(\overline{\overline{A} + B})] + \overline{A}\overline{D}$$

3.10.5 - Idem, para a expressão:

$$S = \overline{[(\overline{B + C\overline{D} + \overline{D} + AC})(A + \overline{B} + \overline{C}) + \overline{B}(C + \overline{A}BC + AC)](A + B)}$$

3.10.6 - Desenhe o circuito que executa a expressão, simplificado.

$$S = \overline{(\overline{B + D})} \{ \overline{B + C \odot D} + \overline{\overline{A}[\overline{BC} + \overline{BC} + A + B(\overline{\overline{C} + \overline{D}})]} \}$$

3.10.7 - Simplifique através da Álgebra de Boole:

$$S = \overline{(\overline{AB} + C\overline{D} + AD)} \{ \overline{B}[C \oplus D + \overline{A}(\overline{B} + \overline{C}) + A\overline{B}\overline{C}] + \overline{A} \}$$

3.10.8 - Demonstre que:

$$A \odot (B \oplus C) = A \oplus (B \odot C)$$

3.10.9 - Através dos diagramas de Veitch-Karnaugh, determine a expressão simplificada de S_1 e S_2 da tabela 3.26.

A B	S_1	S_2
0 0	1	1
0 1	0	1
1 0	1	0
1 1	1	0

Tabela 3.26

3.10.10 - Simplifique as expressões de S_1 , S_2 , S_3 e S_4 da tabela 3.27, utilizando os mapas de Veitch-Karnaugh.

A	B	C	S_1	S_2	S_3	S_4
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

Tabela 3.27

3.10.11 - Idem ao anterior, para a tabela 3.28.

A	B	C	D	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1

Tabela 3.28

3.10.12- Simplifique as expressões utilizando diagramas de Veitch-Karnaugh:

a) $S = A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + ABC$

b) $S = \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
 $ABCD + A\bar{B}C\bar{D}$

c) $S = \bar{B}\bar{D} + \bar{A} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{C}$

d) $S = ABC + AB + \bar{A}BCD + BD + CD + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}\bar{D}$

3.10.13 - Determine as expressões simplificadas para S_1 e S_2 da tabela 3.29.

A	B	C	D	E	S_1	S_2
0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

Tabela 3.29 (parte)

A	B	C	D	E	S ₁	S ₂
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Tabela 3.29

3.10.14 - Simplifique as expressões de S₁ e S₂ da tabela 3.30.

A	B	C	S ₁	S ₂
0	0	0	X	1
0	0	1	0	X
0	1	0	1	0
0	1	1	X	0
1	0	0	1	0
1	0	1	X	1
1	1	0	X	X
1	1	1	1	X

Tabela 3.30

3.10.15 -Determine as expressões simplificadas de S_1 , S_2 , S_3 e S_4 da tabela 3.31.

A	B	C	D	S_1	S_2	S_3	S_4
0	0	0	0	1	X	0	X
0	0	0	1	X	X	0	0
0	0	1	0	X	1	0	X
0	0	1	1	X	0	1	1
0	1	0	0	1	X	X	1
0	1	0	1	0	1	X	X
0	1	1	0	X	0	1	0
0	1	1	1	X	1	0	1
1	0	0	0	X	1	X	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	X	X	0	0
1	0	1	1	1	1	0	X
1	1	0	0	X	0	1	1
1	1	0	1	X	1	0	1
1	1	1	0	1	1	X	1
1	1	1	1	0	X	1	X

Tabela 3.31

3.10.16 -Desenhe os circuitos minimizados que executam as saídas S_1 e S_2 da tabela da verdade:

A	B	C	D	E	S_1	S_2
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	X
0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	X
0	0	1	0	0	1	X
0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	X
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	X
0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	X
1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	X
1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	X
1	1	0	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	X
1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	X

Tabela 3.32

3.10.17 - Obtenha a expressão simplificada:

$$S = (\bar{A} + B) \{ \bar{B} + (B \oplus C) [\overline{\bar{A}B\bar{C} + B(\bar{A} + \bar{D}) + B\bar{C} + \bar{B}D}] + ABD \}$$

3.10.18 - Prove que:

$$\overline{A \oplus B \oplus C \oplus D} = A \odot B \odot C \odot D$$

RESPOSTAS

3.10.1 a) $S = \bar{A}C + B$

b) $S = AB + C\bar{D}$

3.10.2 $S = \bar{C} + \bar{A}\bar{B}$

3.10.3 $S = C\bar{D} + AB + AD + AC$

3.10.4 $S = \bar{A}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + ABD$

3.10.5 $S = B + AC$

3.10.6

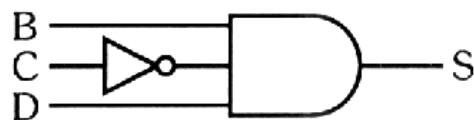


Figura A.15

3.10.7 $S = A\bar{C}\bar{D}$

$$3.10.8 \quad S = A \odot (B \oplus C)$$

$$S = \overline{A}(\overline{B \oplus C}) + A(B \oplus C)$$

$$S = \overline{A} (B \odot C) + A(\overline{B \odot C})$$

$$S = A \oplus (B \odot C)$$

$$3.10.9 \quad S_1 = A + \overline{B}$$

$$S_2 = \overline{A}$$

$$3.10.10 \quad S_1 = \overline{B}\overline{C} + AC + \overline{A}B$$

$$S_3 = \overline{B}C + A\overline{C}$$

$$S_2 = \overline{B} + \overline{C}$$

$$S_4 = \overline{A}\overline{B}C + A\overline{C} + AB + B\overline{C}$$

$$3.10.11 \quad S_1 = \overline{B} + \overline{C}\overline{D} + CD$$

$$S_3 = \overline{A}B\overline{D} + B\overline{C}D + \overline{B}C\overline{D}$$

$$S_2 = \overline{A}\overline{D} + BD + A\overline{B}\overline{C}$$

$$S_4 = \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}CD + ABC + A\overline{C}D$$

$$3.10.12 \quad \text{a) } S = \overline{A}\overline{B} + AC + \overline{A}B$$

$$\text{c) } S = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\text{b) } S = \overline{B}\overline{C}\overline{D} + A\overline{C}D + BCD + \overline{A}\overline{B}C \quad \text{d) } S = \overline{B}C + AC + BD + B\overline{C}$$

$$3.10.13 \quad S_1 = CE + \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC\overline{D} + B\overline{C}D\overline{E}$$

$$S_2 = C + \overline{E} + A\overline{B}D$$

$$3.10.14 \quad S_1 = A + B$$

$$S_2 = \overline{A}\overline{B} + AC$$

$$3.10.15 \quad S_1 = \overline{B} + \overline{D}$$

$$S_3 = B\overline{D} + A\overline{B}\overline{C} + ABC + \overline{A}\overline{B}CD$$

$$S_2 = BD + AC + \overline{B}\overline{D}$$

$$S_4 = B\overline{C} + AD + CD + AB$$

3.10.16

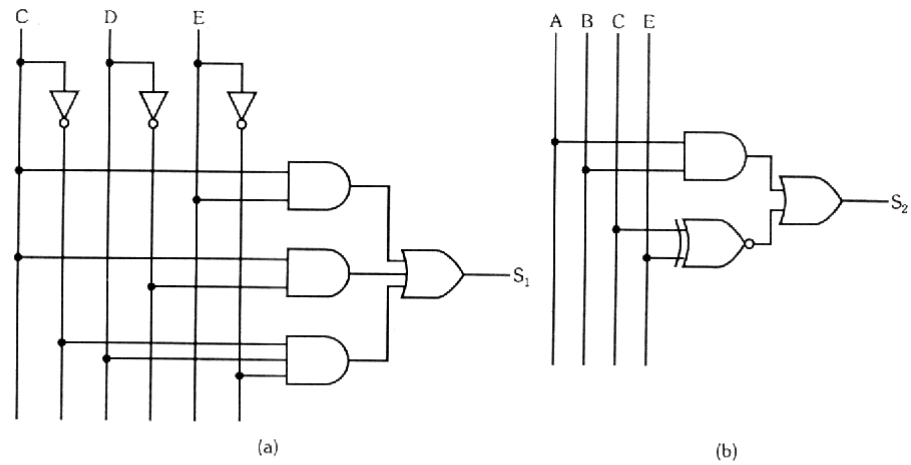


Figura A.16

3.10.17 $S = \bar{A}B + B\bar{D}$

3.10.18

ABCD	$A \oplus B \oplus C \oplus D$	$A \odot B \odot C \odot D$
0 0 0 0	1	1
0 0 0 1	0	0
0 0 1 0	0	0
0 0 1 1	1	1
0 1 0 0	0	0
0 1 0 1	1	1
0 1 1 0	1	1
0 1 1 1	0	0
1 0 0 0	0	0
1 0 0 1	1	1
1 0 1 0	1	1
1 0 1 1	0	0
1 1 0 0	1	1
1 1 0 1	0	0
1 1 1 0	0	0
1 1 1 1	1	1

Tabela A.10