



Estruturas de Dados Aula 15: Árvores

24/05/2009

Fontes Bibliográficas



- Livros:
 - Introdução a Estruturas de Dados (Celes, Cerqueira e Rangel): **Capítulo 13**;
 - Projeto de Algoritmos (Nivio Ziviani): **Capítulo 5**;
 - Estruturas de Dados e seus Algoritmos (Szwarcfiter, et. al): **Capítulo 3**;
 - Algorithms in C (Sedgewick): **Capítulo 5**;
- Slides baseados no material da PUC-Rio, disponível em <http://www.inf.puc-rio.br/~inf1620/>.

Introdução

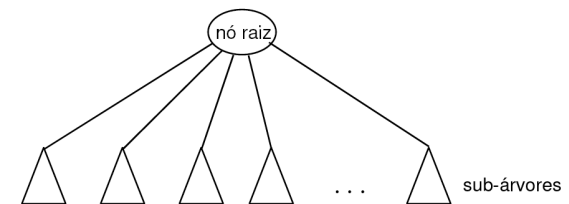


- Estruturas estudadas até agora não são adequadas para representar dados que devem ser dispostos de maneira hierárquica
 - Ex., hierarquia de pastas
 - Árvore genealógica
- Árvores são estruturas adequadas para representação de hierarquias

Definição Recursiva de Árvore



- Um conjunto de nós tal que:
 - existe um nó r , denominado *raiz*, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r
 - os nós raízes destas sub-árvores são os *filhos* de r
 - os *nós internos* da árvore são os nós com filhos
 - as *folhas* ou *nós externos* da árvore são os nós sem filhos

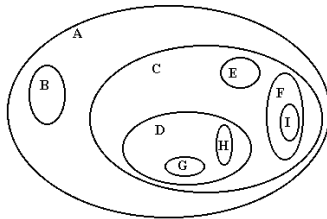


Formas de representação

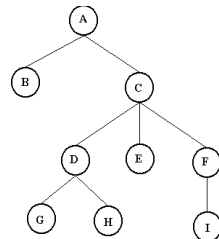


- Representação por parênteses aninhados
– (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I))))

Diagrama de Inclusão



Representação Hierárquica



Subárvore

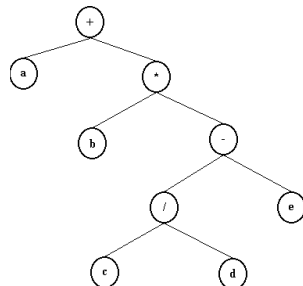


- Seja a árvore acima $T = \{A, B, \dots\}$
- A árvore T possui duas subárvores:
 - T_b e T_c onde $T_b = \{B\}$ e $T_c = \{C, D, \dots\}$
- A subárvore T_c possui 3 subárvores:
 - T_d , T_f e T_e onde $T_d = \{D, G, H\}$, $T_f = \{F, I\}$, $T_e = \{E\}$
- As subárvores T_b , T_e , T_g , T_h , T_i possuem apenas o nó raiz e nenhuma subárvore.

Exemplo (árvore de expressão)



- Representação da expressão aritmética:
($a + (b * (c / d - e))$)



Conceitos Básicos



- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
- Grau de saída (número de filhos de um nó)
- Nó folha (grau de saída nulo) e nó interior (grau de saída diferente de nulo)
- Grau de uma árvore (máximo grau de saída)
- Floresta (conjunto de zero ou mais árvores)

Conceitos Básicos (2)

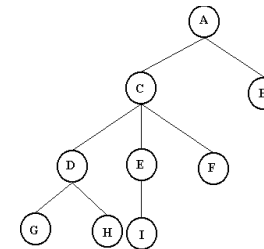


- Caminho
 - Uma sequência de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre v_1 e v_2 , entre v_2 e $v_3, \dots, v_{(k-1)}$ e v_k) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore.
- Comprimento do Caminho
 - Um caminho de k vértices é obtido pela sequência de $k-1$ pares. O valor $k-1$ é o comprimento do caminho.
- Nível ou profundidade de um nó
 - número de nós do caminho da raiz até o nó.

Conceitos Básicos (3)



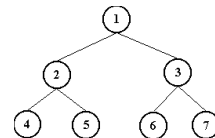
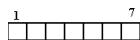
- Nível da raiz (profundidade) é 0.
- Árvore Ordenada: é aquela na qual filhos de cada nó estão ordenados. Assume-se ordenação da esquerda para a direita. Esta árvore é ordenada?



Conceitos Básicos (4)



- Árvore Cheia: Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós têm número máximo de filhos exceto as folhas, e todas as folhas estão na mesma altura.
- Árvore cheia de grau 2: implementação sequencial.



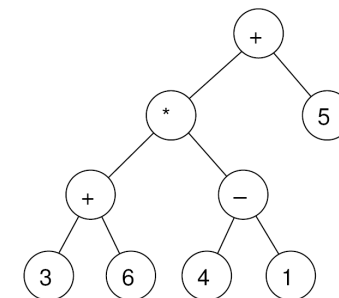
Armazenamento por nível:

posição do nó	posição dos filhos do nó
1	2,3
2	4,5
3	6,7
i	$(2i, 2i+1)$

Exemplo



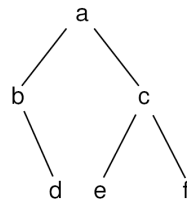
- Árvore binária representando expressões aritméticas binárias
 - Nós folhas representam os operandos
 - Nós internos representam os operadores
 - $(3+6)*(4-1)+5$



Árvores Binárias



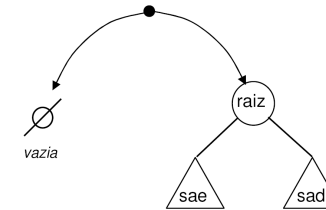
- Notação textual
 - a árvore vazia é representada por <>
 - árvores não vazias por <raiz sae sad>
- Exemplo:
 - <a <b <> <d <> <>> > <c <e <> <>> <f <> <>>> >



Árvore Binária



- Uma árvore em que cada nó tem zero, um ou dois filhos
- Uma árvore binária é:
 - uma árvore vazia; ou
 - um nó raiz com duas sub-árvores:
 - a subárvore da direita (sad)
 - a subárvore da esquerda (sae)



Árvores Binárias – Implementação em C



- Representação: ponteiro para o nó raiz
- Representação de um nó na árvore:
 - Estrutura em C contendo
 - A informação propriamente dita (exemplo: um caractere, ou inteiro)
 - Dois ponteiros para as sub-árvores, à esquerda e à direita

```
struct arv {  
    char info;  
    struct arv* esq;  
    struct arv* dir;  
};
```

TAD Árvores Binárias – Impl. em C (arv.h)

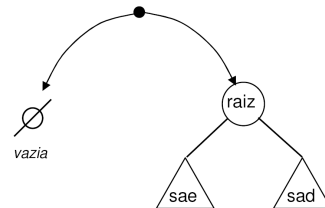


```
typedef struct arv Arv;  
//Cria uma árvore vazia  
Arv* arv_criavazia (void);  
//cria uma árvore com a informação do nó raiz c, e  
//com subárvore esquerda e e subárvore direita d  
Arv* arv_cria (char c, Arv* e, Arv* d);  
//libera o espaço de memória ocupado pela árvore a  
Arv* arv_libera (Arv* a);  
//retorna true se a árvore estiver vazia e false  
//caso contrário  
int arv_vazia (Arv* a);  
//indica a ocorrência (1) ou não (0) do caracter c  
int arv_pertence (Arv* a, char c);  
//imprime as informações dos nós da árvore  
void arv_imprime (Arv* a);
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- Implementação das funções:
 - implementação em geral recursiva
 - usa a definição recursiva da estrutura
- Uma árvore binária é:
 - uma árvore vazia; ou
 - um nó raiz com duas sub-árvores:
 - a sub-árvore da direita (sad)
 - a sub-árvore da esquerda (sae)



TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_criavazia`
 - cria uma árvore vazia

```
Arv* arv_criavazia (void) {  
    return NULL;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_cria`
 - cria um nó raiz dadas a informação e as duas sub-árvores, a da esquerda e a da direita
 - retorna o endereço do nó raiz criado

```
Arv* arv_cria (char c, Arv* sae, Arv* sad) {  
    Arv* p=(Arv*)malloc(sizeof(Arv));  
    p->info = c;  
    p->esq = sae;  
    p->dir = sad;  
    return p;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- `arv_criavazia` e `arv_cria`
 - as duas funções para a criação de árvores representam os dois casos da definição recursiva de árvore binária:
 - uma árvore binária `Arv* a`;
 - é vazia `a=arv_criavazia()`
 - é composta por uma raiz e duas sub-árvores `a=arv_cria(c,sae,sad)`;

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_vazia`
 - indica se uma árvore é ou não vazia

```
int arv_vazia (Arv* a){  
    return a==NULL;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_libera`
 - libera memória alocada pela estrutura da árvore
 - as sub-árvores devem ser liberadas antes de se liberar o nó raiz
 - retorna uma árvore vazia, representada por NULL

```
Arv* arv_libera (Arv* a){  
    if (!arv_vazia(a)){  
        arv_libera(a->esq); /* libera sae */  
        arv_libera(a->dir); /* libera sad */  
        free(a); /* libera raiz */  
    }  
    return NULL;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_pertence`
 - verifica a ocorrência de um caractere `c` em um dos nós
 - retorna um valor booleano (1 ou 0) indicando a ocorrência ou não do caractere na árvore

```
int arv_pertence (Arv* a, char c){  
    if (arv_vazia(a))  
        return 0; /* árvore vazia: não encontrou */  
    else  
        return a->info==c ||  
            arv_pertence(a->esq,c) ||  
            arv_pertence(a->dir,c);  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_imprime`
 - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação

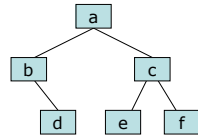
```
void arv_imprime (Arv* a){  
    if (!arv_vazia(a)){  
        printf("%c ", a->info); /* mostra raiz */  
        arv_imprime(a->esq); /* mostra sae */  
        arv_imprime(a->dir); /* mostra sad */  
    }  
}
```

Exemplo



- Criar a árvore <a <b <> <d <><>> > <c <e <><>> > <f <><>> > >

```
/* sub-árvore 'd' */
Arv* a1= arv_cria('d',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'b' */
Arv* a2= arv_cria('b',arv_criavazia(),a1);
/* sub-árvore 'e' */
Arv* a3= arv_cria('e',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'f' */
Arv* a4= arv_cria('f',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'c' */
Arv* a5= arv_cria('c',a3,a4);
/* árvore 'a' */
Arv* a = arv_cria('a',a2,a5);
```

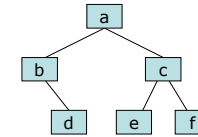


Exemplo



- Criar a árvore <a <b <> <d <><>> > <c <e <><>> > <f <><>> > >

```
Arv* a = arv_cria('a',
    arv_cria('b',
        arv_criavazia(),
        arv_cria('d', arv_criavazia(), arv_criavazia())
    ),
    arv_cria('c',
        arv_cria('e', arv_criavazia(), arv_criavazia()),
        arv_cria('f', arv_criavazia(), arv_criavazia())
    )
);
```

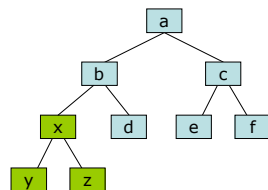


Exemplo



- Acrescenta nós x, y e z

```
a->esq->esq =
    arv_cria('x',
        arv_cria('y',
            arv_criavazia(),
            arv_criavazia()),
        arv_cria('z',
            arv_criavazia(),
            arv_criavazia())
    );
```

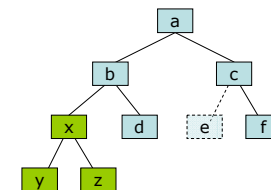


Exemplo



- Libera nós

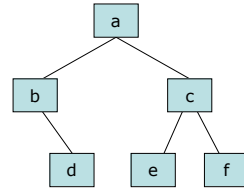
```
a->dir->esq = arv_libera(a->dir->esq);
```



Ordem de Percurso (ou travessia) – Árvores Binárias



- **Pré-ordem:**
 - trata *raiz*, percorre *sae*, percorre *sad*
 - exemplo: a b d c e f
- **Ordem simétrica (ou In-Ordem):**
 - percorre *sae*, trata *raiz*, percorre *sad*
 - exemplo: b d a e c f
- **Pós-ordem:**
 - percorre *sae*, percorre *sad*, trata *raiz*
 - exemplo: d b e f c a

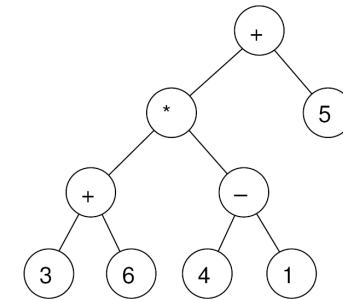


Ordem de Percurso - Exercícios



- Fazer percurso de Pré-ordem
- In-ordem
- Pós-ordem

- Pré-ordem
+*+36-415
- In-ordem
3+6*4-1+5
- Pós-ordem
36+41-*5+



Pré-Ordem – Implementação recursiva



```
void arv_preordem (Arv* a)
{
    if (!arv_vazia(a))
    {
        processa(a); // por exemplo imprime
        arv_preordem(a->esq);
        arv_preordem(a->dir);
    }
}
```

In-Ordem – Implementação recursiva



```
void arv_inordem (Arv* a)
{
    if (!arv_vazia(a))
    {
        arv_inordem (a->esq);
        processa (a); // por exemplo imprime
        arv_inordem (a->dir);
    }
}
```


Pós-Ordem – Implementação recursiva



```
void arv_posordem (Arv* a)
{
    if (!arv_vazia(a))
    {
        arv_posordem (a->esq);
        arv_posordem (a->dir);
        processa (a); // por exemplo imprime
    }
}
```

Pergunta



- função arv_pertence
 - Pré-ordem, pós-ordem ou in-ordem?

```
int arv_pertence (Arv* a, char c)
{
    if (arv_vazia(a))
        return 0; /* árvore vazia: não encontrou */
    else
        return a->info==c ||
            arv_pertence(a->esq,c) ||
            arv_pertence(a->dir,c);
}
```

Pergunta



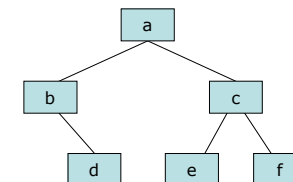
- função arv_libera
 - Pré-ordem, pós-ordem ou in-ordem?

```
Arv* arv_libera (Arv* a){
    if (!arv_vazia(a)){
        arv_libera(a->esq); /* libera sae */
        arv_libera(a->dir); /* libera sad */
        free(a); /* libera raiz */
    }
    return NULL;
}
```

Árvores Binárias - Altura



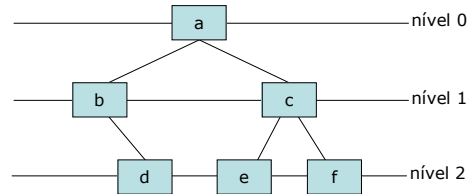
- Propriedade das árvores
 - Existe apenas um caminho da raiz para qualquer nó
- Altura de uma árvore
 - comprimento do caminho mais longo da raiz até uma das folhas
 - a altura de uma árvore com um único nó raiz é zero
 - a altura de uma árvore vazia é -1
- Esforço computacional necessário para alcançar qualquer nó da árvore é proporcional à altura da árvore
- Exemplo:
 - $h = 2$



Árvores Binárias - conceitos



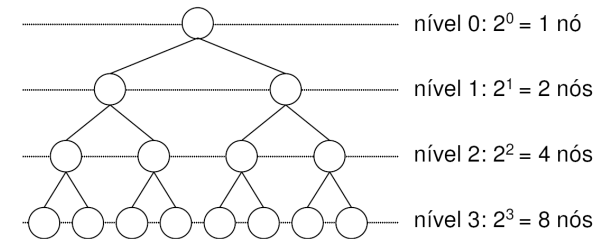
- Nível de um nó
 - a raiz está no nível 0, seus filhos diretos no nível 1, ...
 - o último nível da árvore é a altura da árvore



Árvores Binárias - conceitos



- Árvore Cheia
 - todos os seus nós internos têm duas sub-árvores associadas
 - número n de nós de uma árvore cheia de altura h
 - $n = 2^{h+1} - 1$



Árvores Binárias - conceitos



- Árvore Degenerada
 - Nós internos têm uma única subárvore associada
 - Vira uma estrutura linear
 - Arvore de altura h tem $n = h+1$
- Altura de uma árvore
 - Importante medida de eficiência (visitação do nó)
 - Árvore com n nós:
 - Altura mínima proporcional a $\log n$ (árvore binária cheia)
 - Altura máxima proporcional a n (árvore degenerada)

Exercícios



- Escrever uma função recursiva que calcule a altura de uma árvore binária dada. A altura de uma árvore é igual ao máximo nível de seus nós.

Respostas



```
static int max2 (int a, int b)
{
    return (a > b) ? a : b;
}

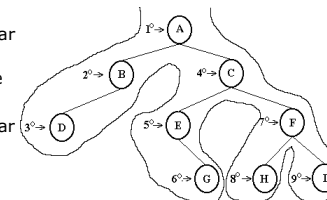
int arv_altura (Arv* a)
{
    if (arv_vazia(a))
        return -1;
    else
        return 1 + max2 (arv_altura (a->esq),
            arv_altura (a->dir));
}
```

Exercícios



- Escrever o algoritmo de visita em Pré-Ordem utilizando alocação dinâmica mas sem utilizar procedimentos recursivos. Utilizar pilha (definindo um vetor que pode ser acessado pelo topo) para saber o endereço da subárvore que resta à direita.

- processar raiz A
- guardar A na pilha para poder acessar C depois
- passa à B e processa essa subárvore
- idem para D
- retorna B (topo da pilha) para acessar D que é a subárvore esquerda



Respostas



```
void arv_preordem (Arv* a)
{
    Arv* A[MAX]; //qual seria o valor de max?
    Arv* p; Arv* raiz; int topo;
    int acabou;
    topo = 0; p = a; acabou = arv_vazia(a); //inicializações
    while (!acabou) // enquanto houver nós para processar
    {
        while (!arv_vazia(p))
        {
            processa (p->info);
            topo++; A[topo] = p;
            p = p->esq;
        }
        if (topo != 0)
        {
            p = A[topo]->dir;
            topo--;
        }
        else {acabou = 1;}
    }
}
```

Para casa



- Fazer função para retornar o pai de um dado nó de uma árvore
 - Dado um item, procura se item existe na árvore (usando algum algoritmo de travessia)
 - Caso positivo retorna o conteúdo do pai do nó
 - Pode ser recursivo ou não