Método dos Elementos Finitos: Aspectos Computacionais e Aplicações – Uma Introdução.

Lucia Catabriga

PPGI e PPGEM - CT/UFES

Processo de Solução

- Fenômeno Natural
- Modelo Matemático - Equações Governantes
- Métodos de Aproximação

Diferenças Finitas
Volumes Finitos
Elementos Finitos
Elementos de Contorno

Processo de Solução

Não dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio

↓

Solução do Sistema Linear

Dependem do Tempo

Equação Diferencial Parcial

↓

Aproximação do domínio
Eq. Diferencial Ordinária

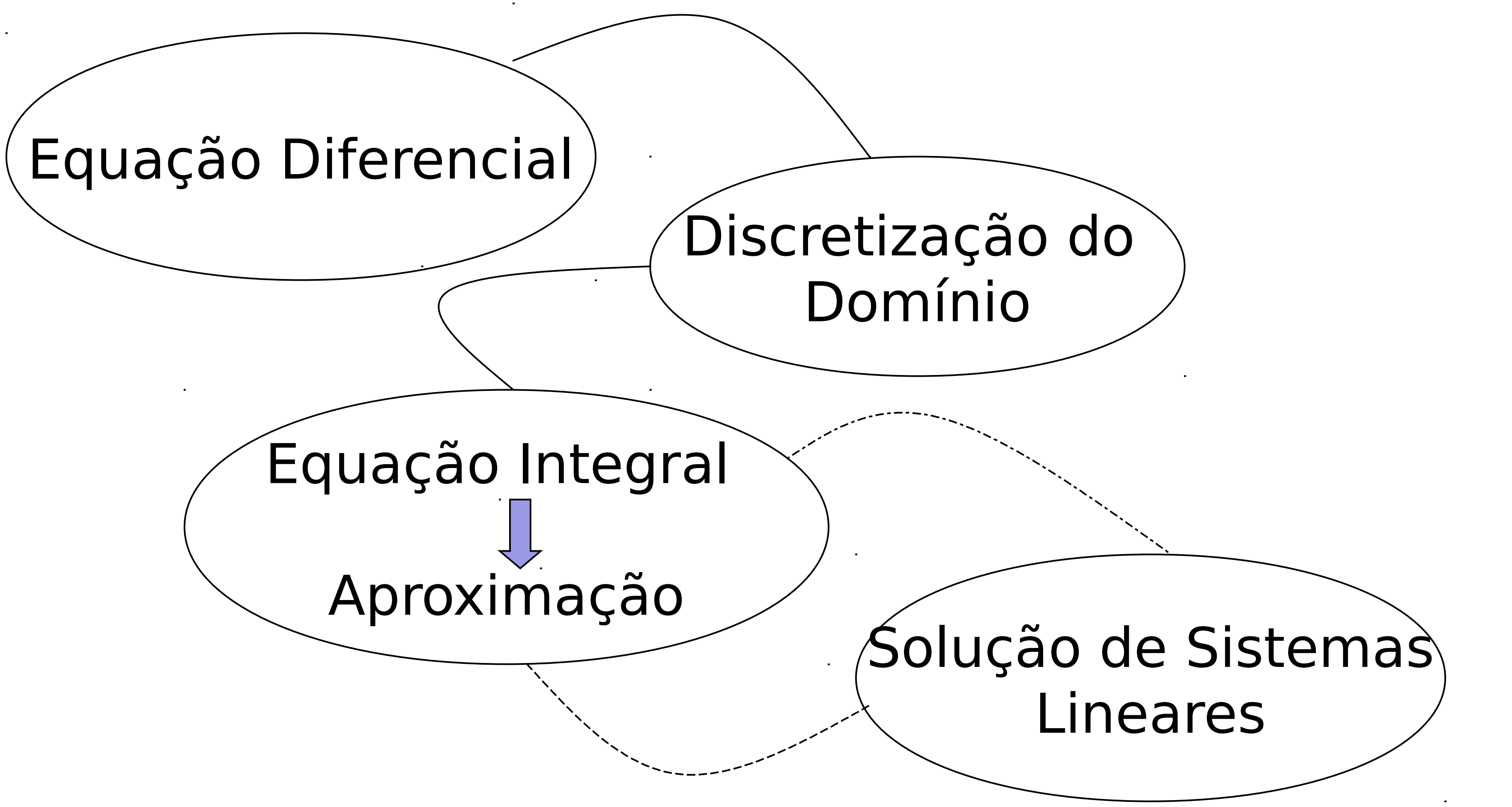
↓

Aproximação no Tempo

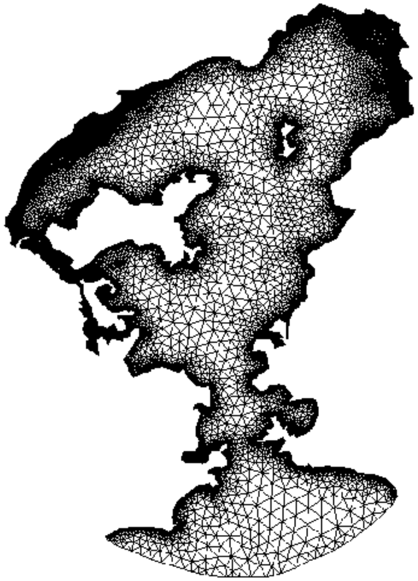
↓

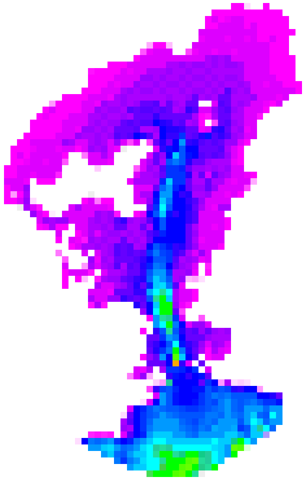
Solução do Sistema Linear em cada tempo

Método dos Elementos Finitos



Exemplos do Processo de Solução





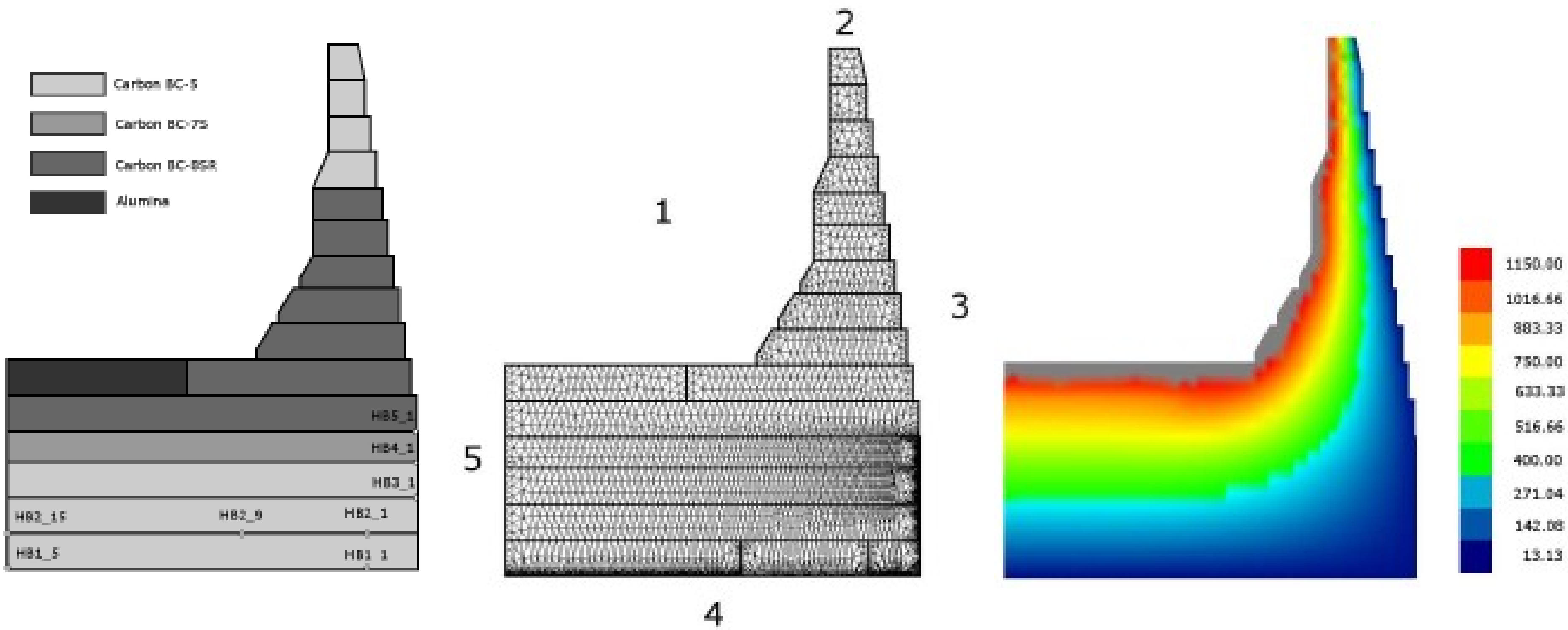
Solução Aproximada

Domínio Real

Domínio Discretizado

Dispersão de Poluentes na Baía de Guanabara

Exemplos do Processo de Solução



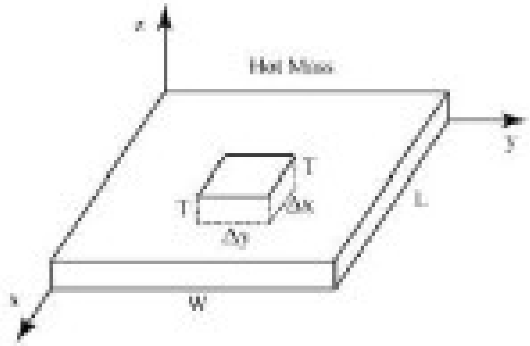
Domínio

Domínio Discretizado

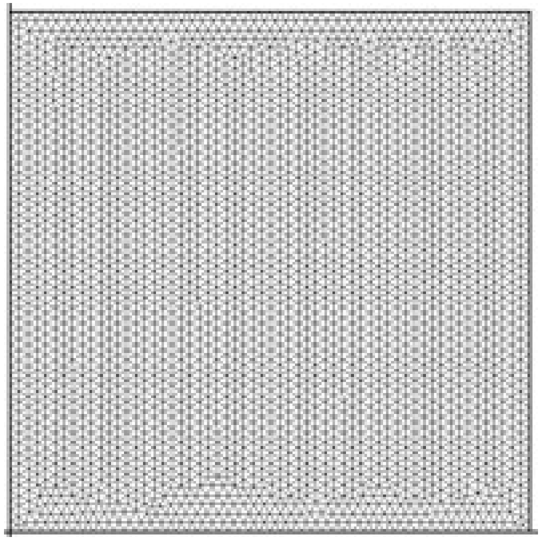
Solução Aproximada

Distribuição da Temperatura no Cadinho do Alto Forno 3 da Arcelor Mittal

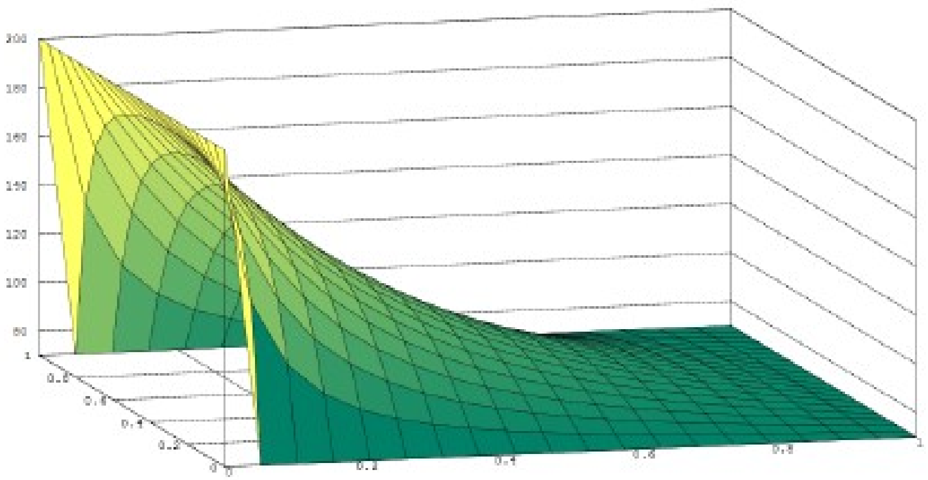
Exemplos do Processo de Solução



Domínio



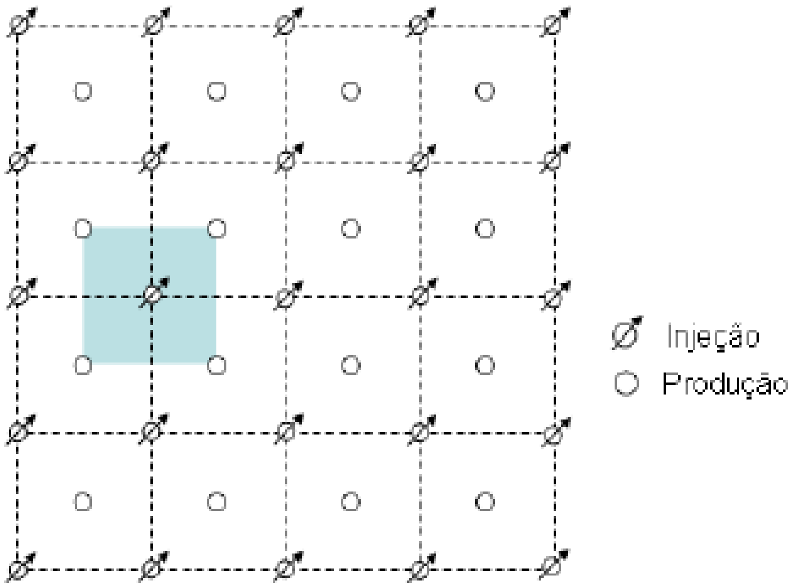
Domínio Discretizado

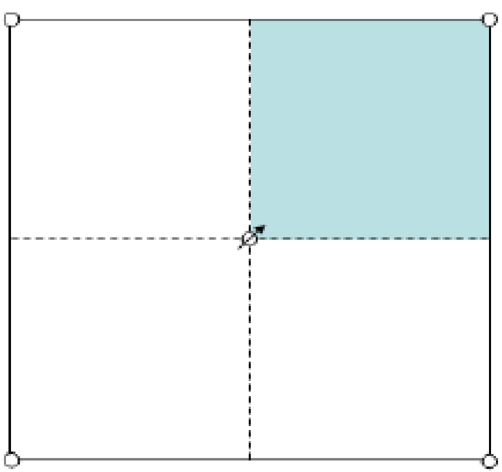


Solução Aproximada

Resfriamento de Chips de Computadores

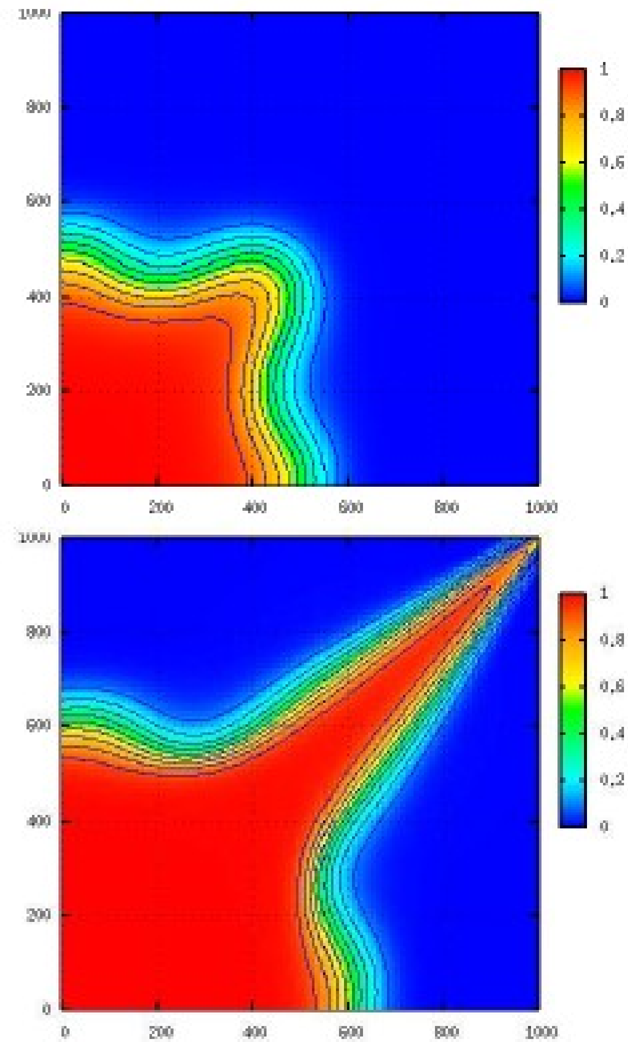
Exemplos do Processo de Solução





Domínio

Solução
Aproximada



Simulação de escoamento em
Reservatórios de Petróleo

Etapas de Solução

Pré-processamento dos dados:

- Condições de Contorno
- Condições Iniciais
- Definição do domínio discretizado

Processamento de solução:

- Para cada elemento da malha montar estrutura de solução
- Obter solução aproximada ou solução no tempo corrente

Pós-processamento dos Resultados:

- Visualização e análise dos resultados obtidos

Exemplos de Equações Diferenciais

Unidimensional (1d)

$$\mathrm{P1} \;:\; \begin{cases} u'' = f \text{ in } (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

N-dimensional (N-d)

$$\mathrm{P2} \;:\; \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

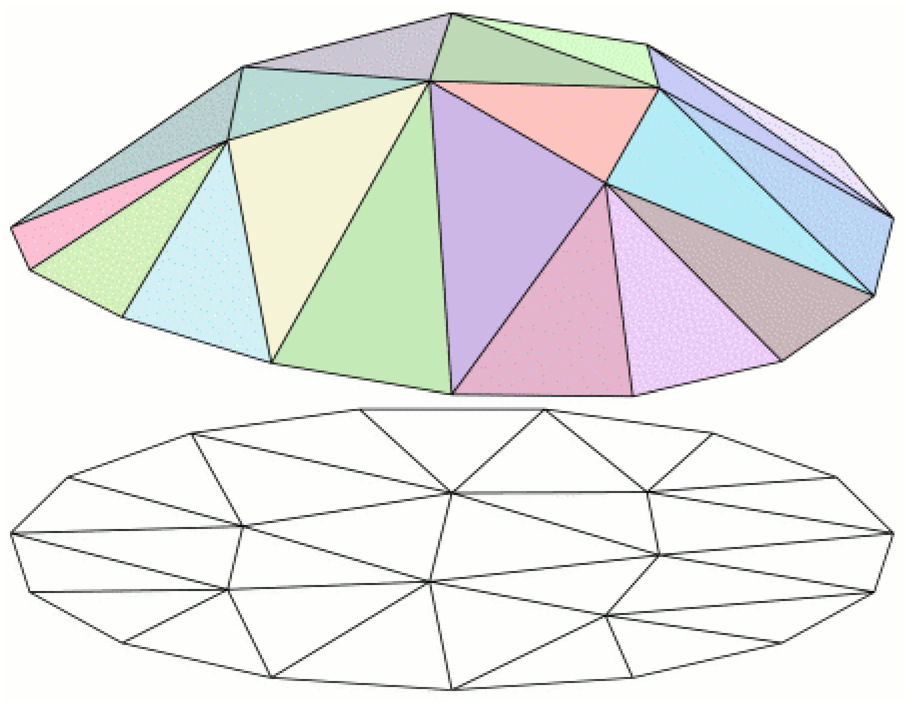
Objetivo: transformar a equação diferencial em um sistema d
equações discretas:

$$Au=b$$

O sistema resultante é esparso!

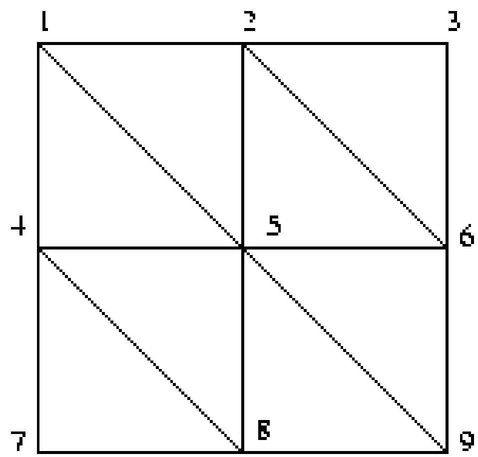
Montagem do Sistema Resultante

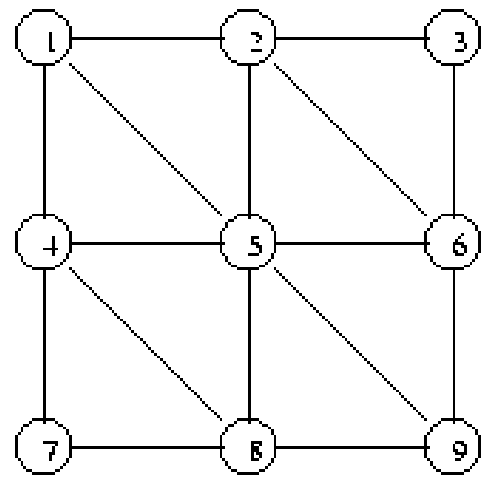
$$A = \sum_{e=1}^{nel} K^e \qquad b = \sum_{e=1}^{Nel} f^e \qquad Au = b$$



Estrutura de Dados ⇒ Matriz Esparsa

Malha





Grafo

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} \otimes & \times & & \times & \times & & & & \\ \times & \otimes & \times & & \times & \times & & & \\ & \times & \otimes & & & \times & & & \\ \times & & & \otimes & \times & & \times & \times & \\ \times & \times & & \times & \otimes & \times & & \times & \times \\ & \times & \times & & \times & \otimes & & & \times \\ & & & \times & & & \otimes & \times & \\ & & & \times & \times & & \times & \otimes & \times \\ & & & & \times & \times & & \times & \otimes \end{array}\right]\end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

Matriz esparsa

Sistema Linear: Métodos Diretos

- Sistema Linear: $Ax=b$
- Fatoração $A = LU$

- Solução: $L\,U\,x = b$

$$L\,y = b$$

$$U\,x = y$$

Sistema Linear: Métodos Iterativos Estacionários

- Sistema Linear: $Ax=b$
- Separação de A em M+N

$$[M+N]x=b$$

- Iteração:

$$x^{k+1}=M^{-1}\,(b-Nx^{k})$$

$$M[x^{k+1}-x^{k}]=Ax^{k}+b=-r^{k}$$

- Métodos:

Jacobi: $M=D$, $D=diag(A)$

Gauss-Seidel: $M=D+E$, E triângulo inferior de A

Sistema Linear: Mét. Iterativos Não-Estacionários

- Classe de métodos mais usado em CFD: Gradientes Conjugados ou GMRES
- Atualização GMRES: $x_k = x_0 + y_k$
- y_k calculado como a melhor correção possível no subespaço de Krylov

$$K_m = \text{span}[r_0, Ar_0, A^2r_0, \ldots , A^{k-1}r_0]$$

que minimiza o resíduo

$$||r_k|| = \min_{y \in K_m} ||r_0+Ay||$$

- Aplicação na prática em ciclos, com k fixo

Sistemas Lineares: Operações Principais do GMRES

- Produtos escalares
- Combinações de vetores (SAXPY’s)

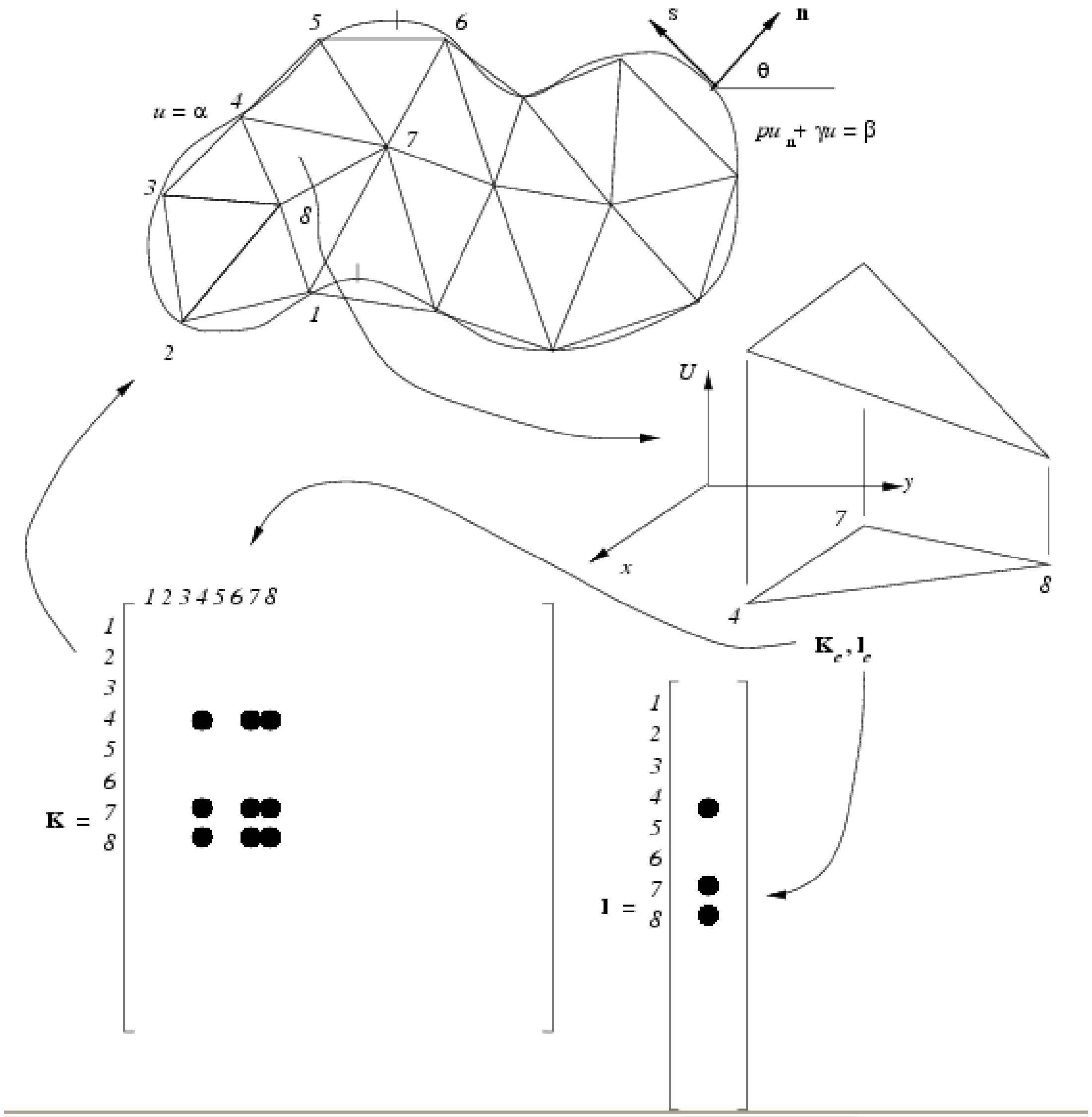
  $y = y + ax$
- Produto matriz-vetor (matvec)

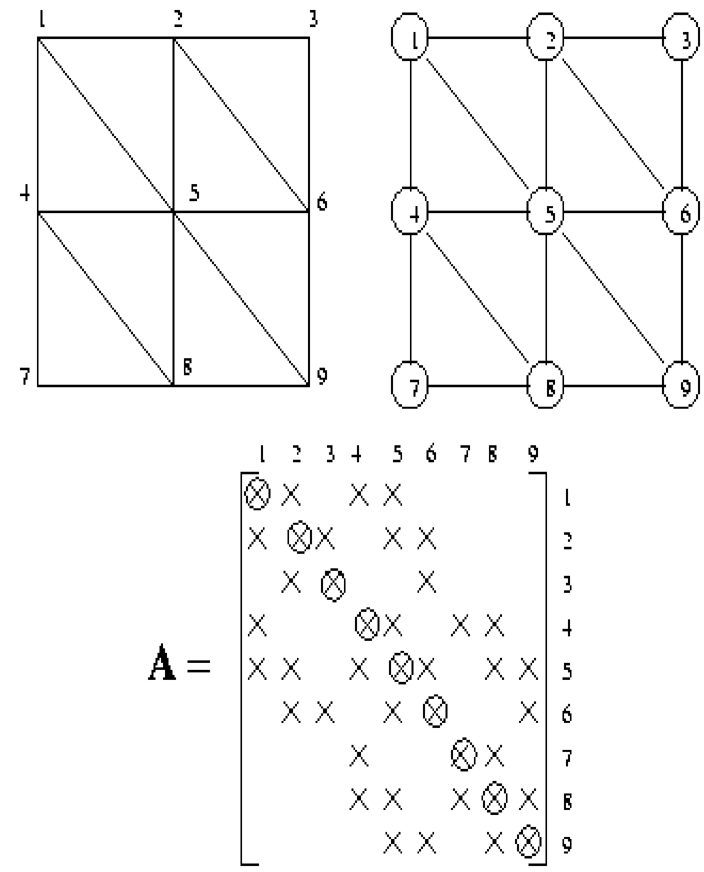
Estudo do Armazenamento: Tipos mais usados

- Armazenamentos com estruturas locais
  - Elemento por elemento
  - Aresta por aresta
- Armazenamentos com estruturas globais:
  - Tipo banda (diagonais não nulas)
  - Linhas esparsas comprimidas (CSR – Compressed Sparse Row)

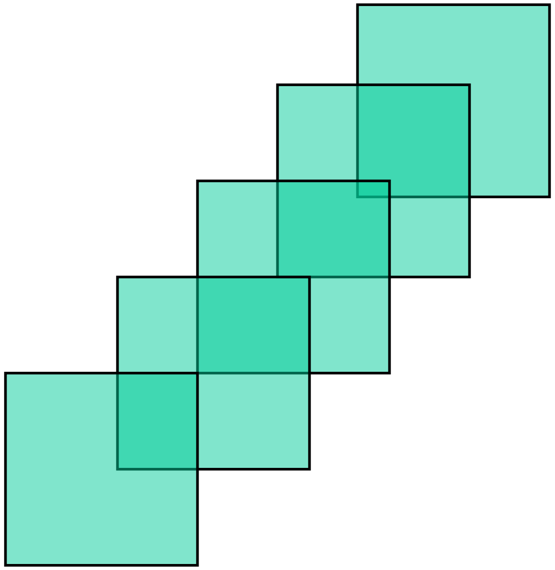
Objetivo Principal: eficiência no produto matriz-vetor

Estudo do Armazenamento: estrutura típica de um problema 2D





Armazenamento Elemento-por-Elemento (EBE)

$\boldsymbol{A} =$ 

ke (nd,nd,nel)

Matvec EBE

$$\mathbf{Av} = \left(\sum_{e=1}^{nel} A^e \right) v = \sum_{e=1}^{nel} A^e v^e$$

Algoritmo

```
para e=1,2,…,nel
   localize: ve ← v(e)
   produto: ave ← ke*ve
   espalhe e acumule:  v(e) ← v(e) + ave
fim_para ! e
```

UFES
UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO

Armazenamento CSR

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & a_{13} & & & \\ & a_{22} & & & a_{25} & \\ & & a_{33} & a_{34} & & \\ a_{41} & & & & a_{45} & \\ & & a_{53} & a_{54} & & \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$AA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{22} & a_{25} & a_{33} & a_{34} & a_{41} & a_{45} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}$$

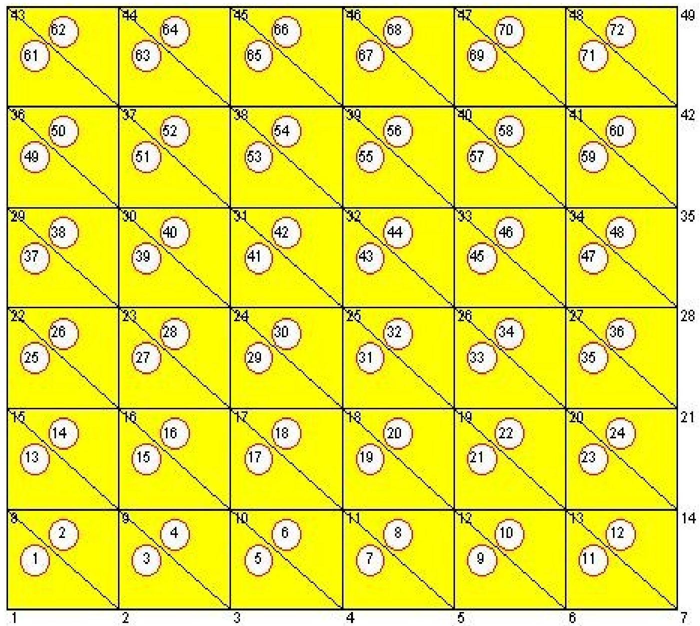
$$JA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

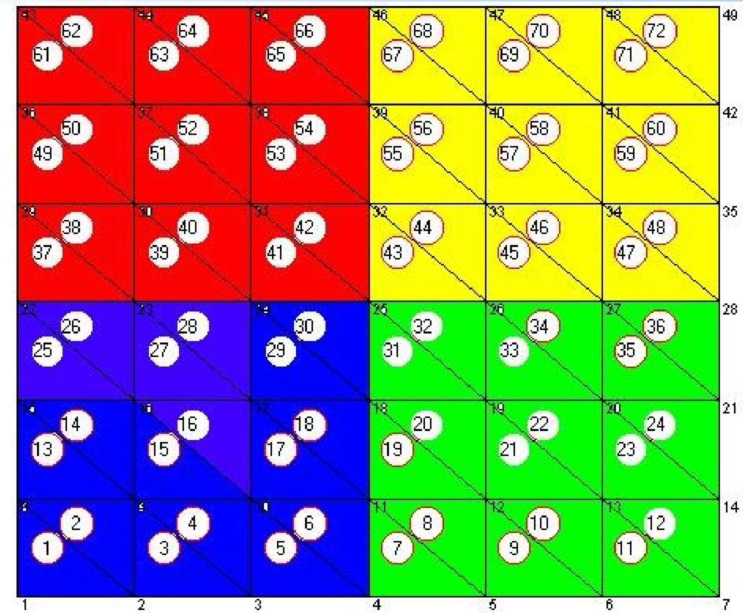
$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

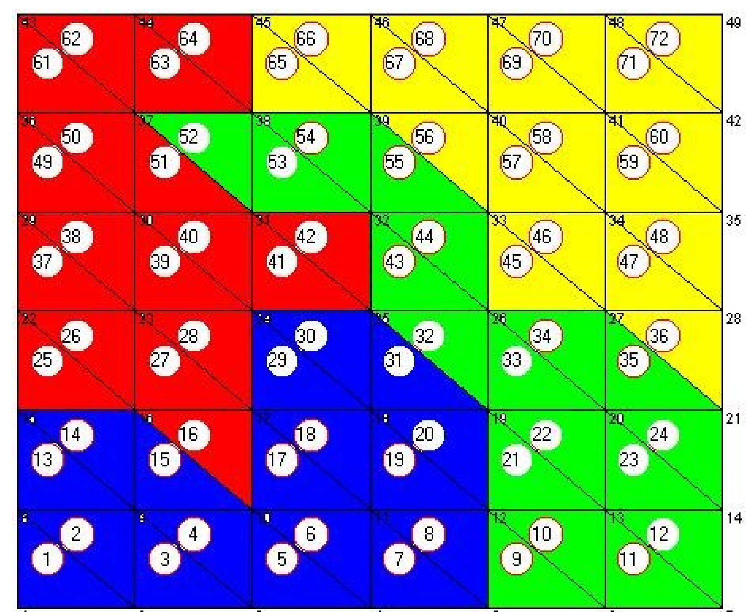
Algoritmo Matvec CSR y = Av

```
para i=1,2,…,n
   k1 = IA(i)
   k2 = IA(i+1)-1
   para j = k1,…,K2
            y(i)= y(i) + AA(j)*v(JA(j))
      fim_para ! j
Fim_para ! i
```

Elementos Finitos X Processamento Paralelo





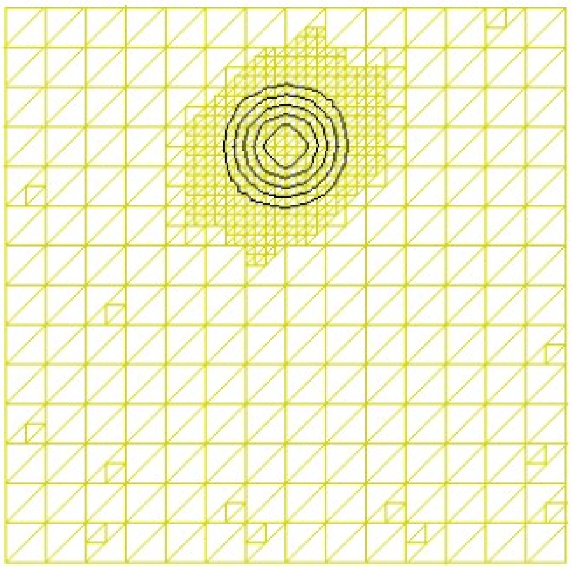


$$A=\sum_{e=1}^{nel} K^e$$

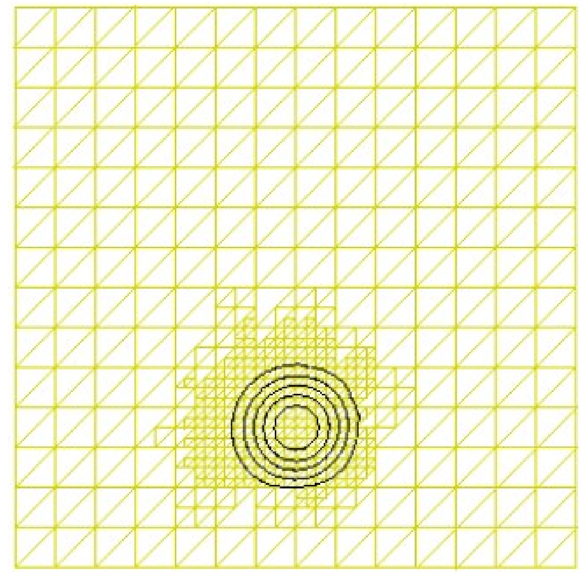
$$Au=b$$

$$b=\sum_{e=1}^{Nel} f^e$$

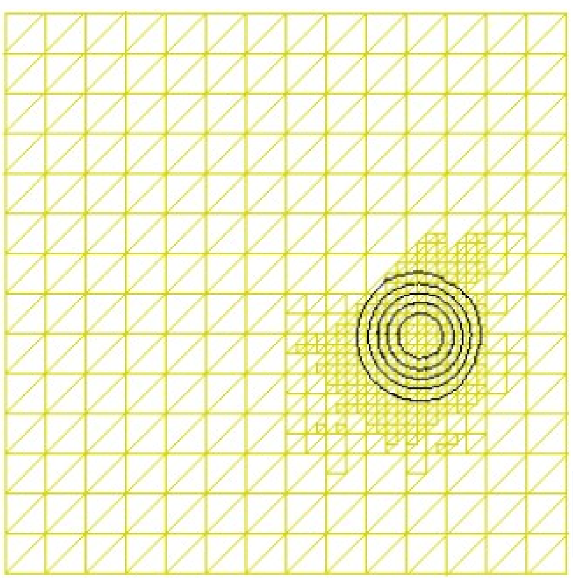
Elementos Finitos X Adaptatividade



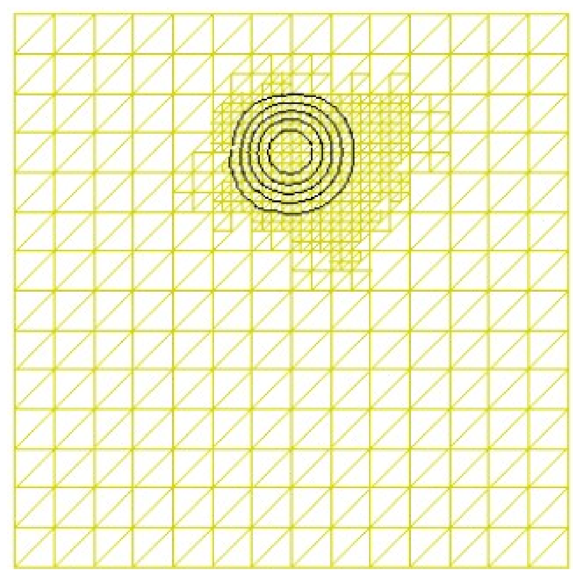
t = 0,0



t = 3,14



t = 4,40



t = 8,29

Programa - 2015/2

- Introdução - Um Problema Modelo
  - Definição do Problema Variacional; Aproximações de Galerkin; Funções Bases de Elementos Finitos; Precisão de uma Aproximação por Elementos Finitos.
- Problemas Unidimensionais
  - Formulação Variacional; Interpolações e Aproximações; Estratégias de Implementação.
- Problemas Bidimensionais
  - Formulação Variacional; Interpolações e Aproximações; Estudo de Transformações; Elementos Triangulares e Quadrilaterais; Estratégias de implementação; Estudo de armazenamento das matrizes resultantes; Geração de malha; Visualização das soluções.
- Métodos de solução de problemas transientes (Método Crank-Nicolson e Método preditor-multicorretor).
- Estudo de aplicações.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO

Bibliografia

- T.J.R. Hughes, The Finite Element Method, Prentice-Hall, NJ, 1987.
- J. T. Oden, E. B. Becker, G. F. Carey, Finite Elements: An Introduction, Volume 1, Prentice Hall, 1981.
- Souza, R.M., O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor, Notas de aula, Universidade Federal do Pará, Núcleo de instrumentação e computação aplicacada à engenharia (NICAE), 2003.
- Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhalli N. Seetharamu, Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow, John Wiley and Sons, 2004.
- Jean Donea and Antonio Huerta, Finite Element Methods for Flow Problems, John Wiley & Sons, 2003.