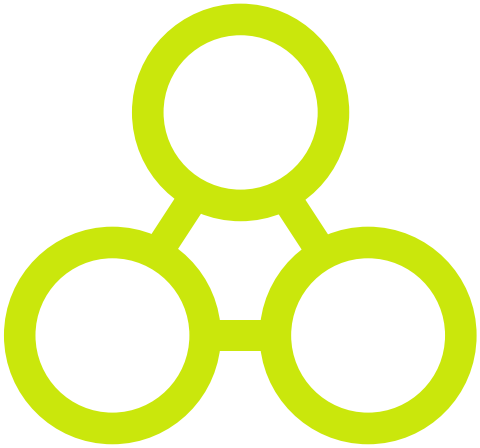


Introdução à Computação

Jordana Sarmenghi Salamon
jssalamon@inf.ufes.br
jordanasalamon@gmail.com
http://inf.ufes.br/~jssalamon

Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo

Agenda

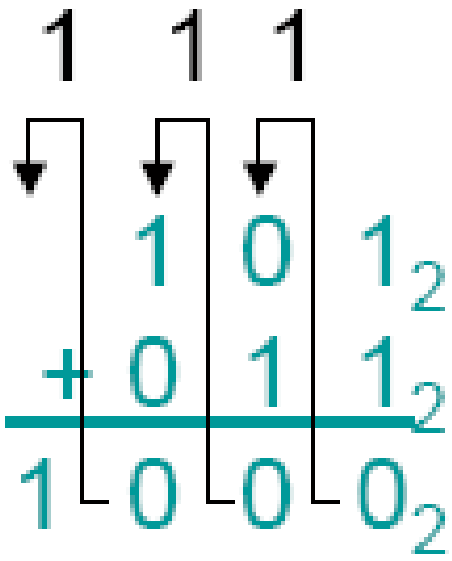
- Aritmética Binária
  - Soma
  - Subtração
  - Multiplicação
  - Divisão
- Representação com Sinal
  - Sinal Magnitude
  - Complemento de 1
  - Complemento de 2

Adição Binária

- **Regras:**
- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 0 (e “vai 1” para o dígito de ordem superior)
- 1 + 1 + 1 = 1 (e “vai 1” para o dígito de ordem superior)

Adição Binária

- Exemplo:
- EX1: 101 + 011



EX2: 100 + 111

¹ 100

+ 111

1011

Adição Binária

- Exercício:
- Realize as operações de soma abaixo:
- 1011 + 10111
- 11010 + 100111
- 1001 + 10110
- 100110 + 10001
- 101 + 110000

Adição Binária

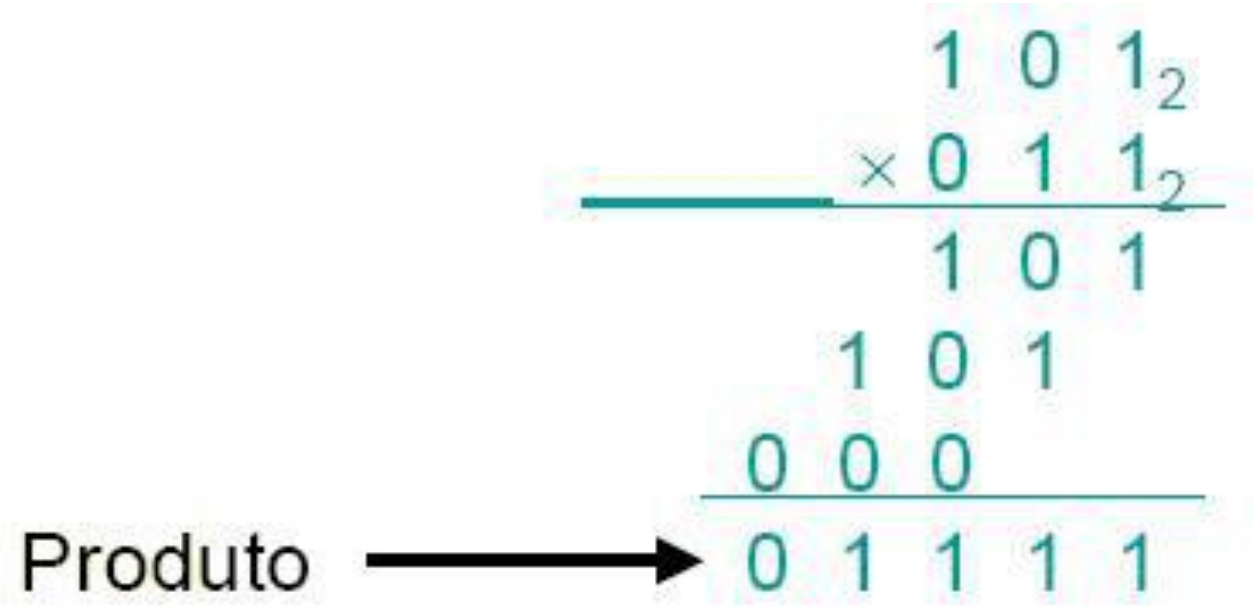
- Exercício:
- Realize as operações de soma abaixo:
- 1011 + 10111 = 100010
- 11010 + 100111 = 1000001
- 1001 + 10110 = 11111
- 100110 + 10001 = 110111
- 101 + 110000 = 110101

Multiplicação Binária

- **Regras:**
- 0 x 0 = 0
- 0 x 1 = 0
- 1 x 0 = 0
- 1 x 1 = 1
- Mesmo método que o decimal: deslocamentos e adições;
- Número maior deve ser colocado acima do menor.

Multiplicação Binária

- Ex: 101 x 011



Multiplicação Binária

- Exercício:
- Realize as operações de multiplicação abaixo:
- 10 x 10
- 11 x 101
- 10 x 110
- 1000 x 111
- 1010 x 110

Multiplicação Binária

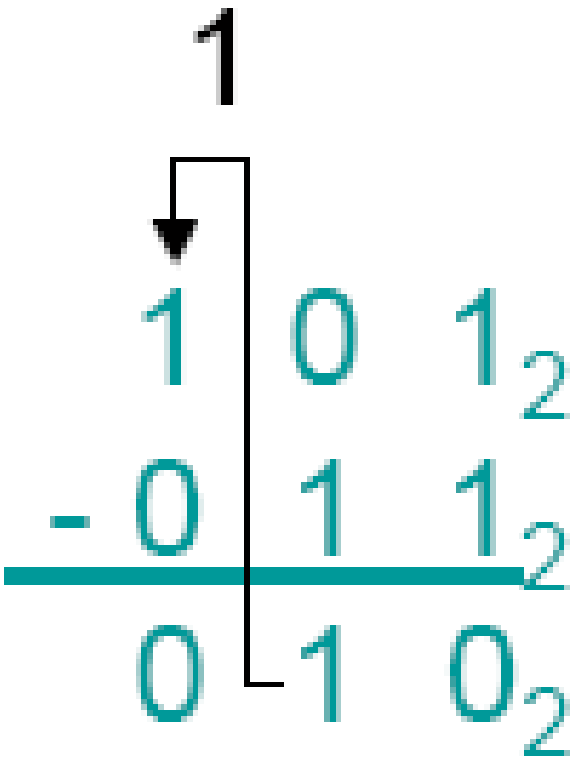
- Exercício:
- Realize as operações de multiplicação abaixo:
- 10 x 10 = 100
- 11 x 101 = 1111
- 10 x 110 = 1100
- 1000 x 111 = 111000
- 1010 x 110 = 111100

Subtração Binária

- **Regras:**
- 0 - 0 = 0
- 0 - 1 = 1 (e “pede emprestado 1” para o dígito de ordem superior)
- 1 - 0 = 1
- 1 - 1 = 0

Subtração Binária

- Ex: 101 - 011



Subtração Binária

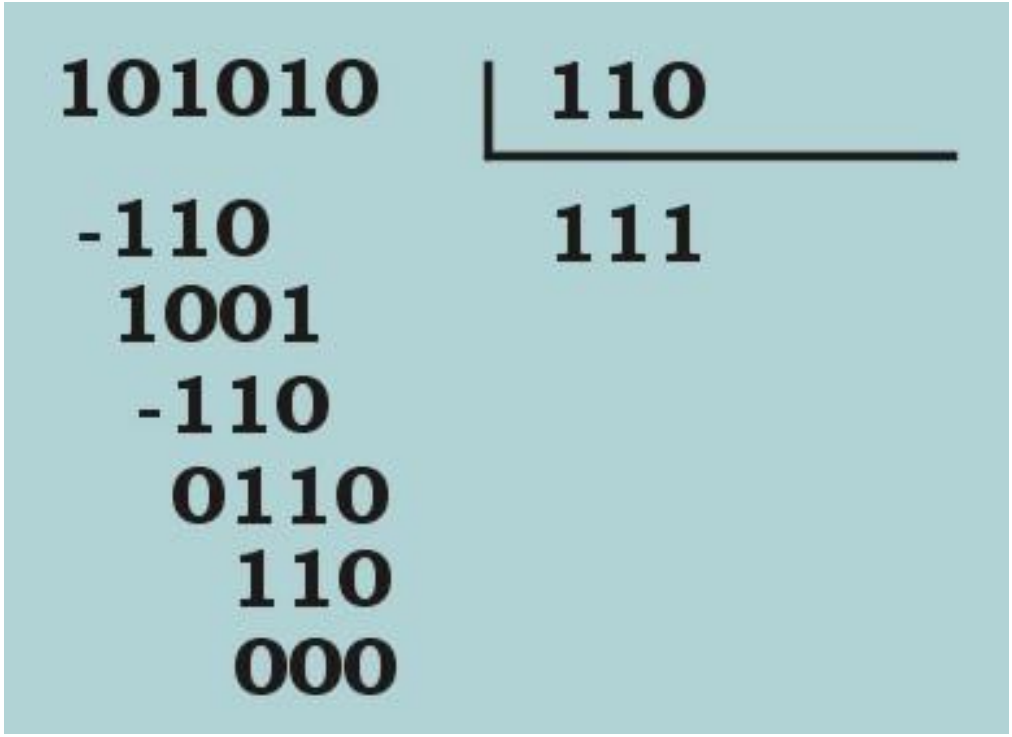
- Exercício:
- Realize as operações de subtração abaixo:
- 1000 - 111
- 1010 – 110
- 1111 – 010
- 1001 – 011
- 1011 - 100

Subtração Binária

- Exercício:
- Realize as operações de subtração abaixo:
- 1000 – 111 = 0001
- 1010 – 110 = 0100
- 1111 – 010 = 1101
- 1001 – 011 = 0110
- 1011 – 100 = 0111

Divisão Binária

- Mesmo método que o decimal: deslocamentos e subtrações.
- Ex:



Subtração Binária

- Exercício:
- Realize as operações de divisão abaixo:
- 1000 / 010
- 1010 / 101
- 1111 / 011
- 1001 / 011
- 1011 / 010

Subtração Binária

- Exercício:
- Realize as operações de divisão abaixo:
- 1000 / 010 = 100
- 1010 / 101 = 010
- 1111 / 011 = 101
- 1001 / 011 = 011
- 1011 / 010 = 101

Representação de números com sinal

- **Sinal Magnitude**
- A representação de **sinal-e-magnitude** ou **sinal-magnitude** é a mais familiar a nós que utilizamos o sistema numérico de base 10, usando um **sinal positivo ou negativo** à esquerda do número para indicar se este é positivo ou negativo.

Representação de números com sinal

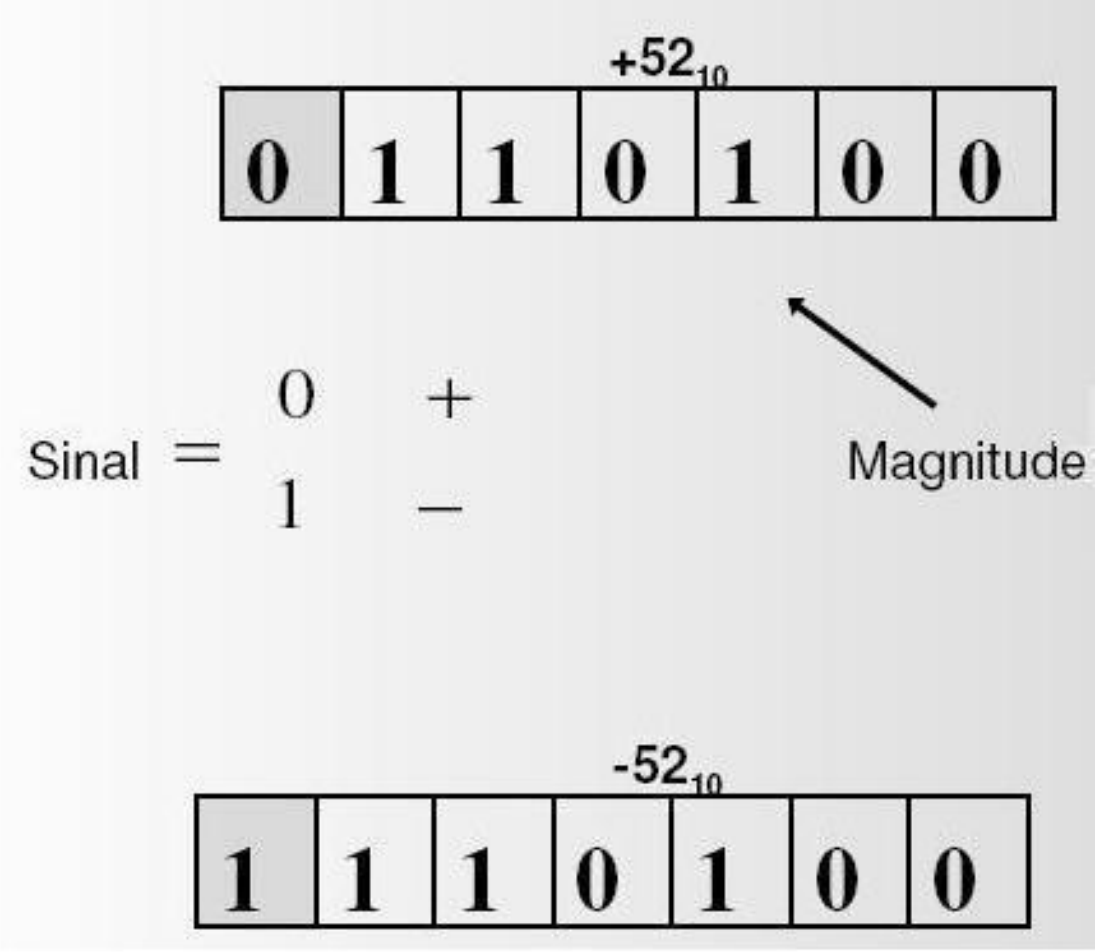
- **Sinal Magnitude**
- Pode-se primeiramente abordar o problema de representar um sinal de número através da atribuição de um **bit de sinal** para representar o sinal: define-se esse bit (frequentemente o bit mais significativo) para ***0*** **para representar um número positivo**, e define-se como ***um*** **para representar um número negativo**. Os bits restantes do número representam a **magnitude** (ou o valor absoluto).

Representação de números com sinal

- **Sinal Magnitude**
- Assim, em um byte com 8 bits, são utilizados 7 bits para representar o valor e um bit para representar o sinal. Neste caso, o valor pode variar de 0000000 (0) a 1111111 (127). Assim, pode-se representar números de -127_{10} a $+127_{10}$, uma vez que você adicione o bit de sinal (o oitavo bit). **Uma consequência desta representação é que existem duas maneiras de representar o zero, 00000000 (0) e 10000000 (-0).**

Representação de números com sinal

- **Sinal Magnitude**



Representação de números com sinal

- **Sinal Magnitude**
- **Algoritmo de soma (números com sinal):**
  - Sinais diferentes
    - Encontra número com maior magnitude
    - Subtrai maior do menor
    - Atribui o resultado sinal do número de maior magnitude
- O bit de sinal não é considerado nas operações!

Representação de números com sinal

- **Sinal Magnitude**
- **Algoritmo de soma (números com sinal):**
  - Sinais iguais
    - Soma e atribui sinal dos operandos
    - Atenção deve ser dada ao estouro de magnitude

Representação de números com sinal

- **Complemento a base**

- Em computadores a subtração em binário é feita por um artifício: o "Método do Complemento a Base“;
- Consiste em encontrar o complemento do número em relação a base e depois somar os números.

Representação de números com sinal

- **Representação de números em complemento**
- Complemento é a diferença entre o maior algarismo possível na base e cada algarismo do número;
- Através da representação em complemento a subtração entre dois números pode ser substituída pela sua soma em complemento.

Representação de números com sinal

- **Representação de números positivos em Complemento**

- A representação de números positivos em complemento não tem qualquer alteração, isto é, é idêntica à representação em sinal e magnitude.

Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a (base -1)**
- A representação dos números inteiros negativos é obtida efetuando-se**: maior algarismo possível na base menos cada algarismo do número.** Fica mais fácil entender através de exemplos…

Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a (base -1)**
- Ex 1: Calcular o complemento a (base - 1) do número -297
- Se a base é 10, então 10 - 1 = 9 e o complemento a (base -1) será complemento a 9.

Ex.1

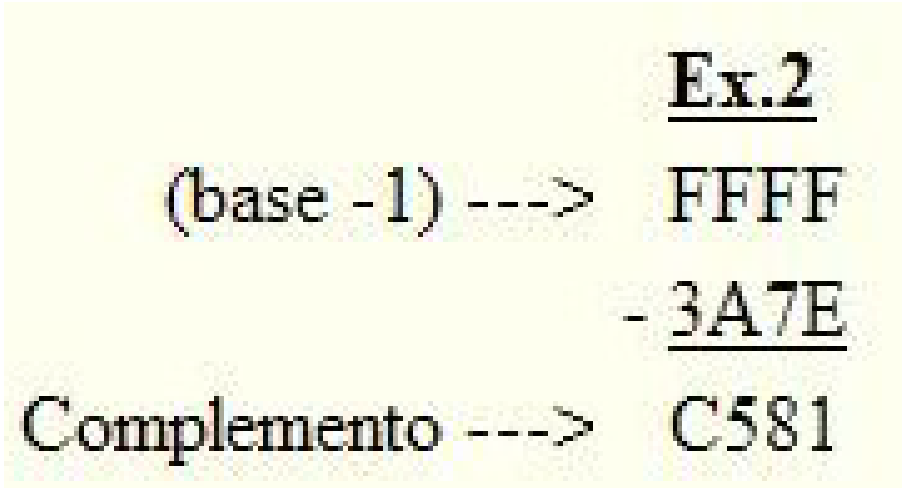
(base -1) ---> 999

\- 297

Complemento ---> 702

Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a (base -1)**
- Ex 2: Calcular o complemento a (base - 1) do número -3A7E
- Se a base é 16, então 16 - 1 = 15 = F e o complemento a (base -1) será complemento a F.



Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a (base -1)**
- Exercício:
- Calcule o complemento à **base -1** dos números abaixo:
- $-50_{(8)}$
- $-29C_{(16)}$
- $-33_{(10)}$

Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a (base -1)**
- Exercício:
- Calcule o complemento à **base -1** dos números abaixo:
- $-50_{(8)} = 77 - 50 = 27_{(8)}$
- $-29C_{(16)} = FFF - 29C = D63_{(16)}$
- $-33_{(10)} = 99 - 33 = 66_{(10)}$

Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**
- Para se obter o complemento a 1 de um número binário, devemos subtrair cada algarismo de 1.
- Uma particularidade dos números binários é que, para efetuar esta operação, **basta inverter todos os bits**.

Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**
- Ex: Calcular o complemento a (base - 1) do número 0011.
- Se a base é 2, então 2 - 1 = 1 e o complemento a (base -1) será complemento a 1 (C1).

```
  1111
- 0011
------
  1100 (C1)
```

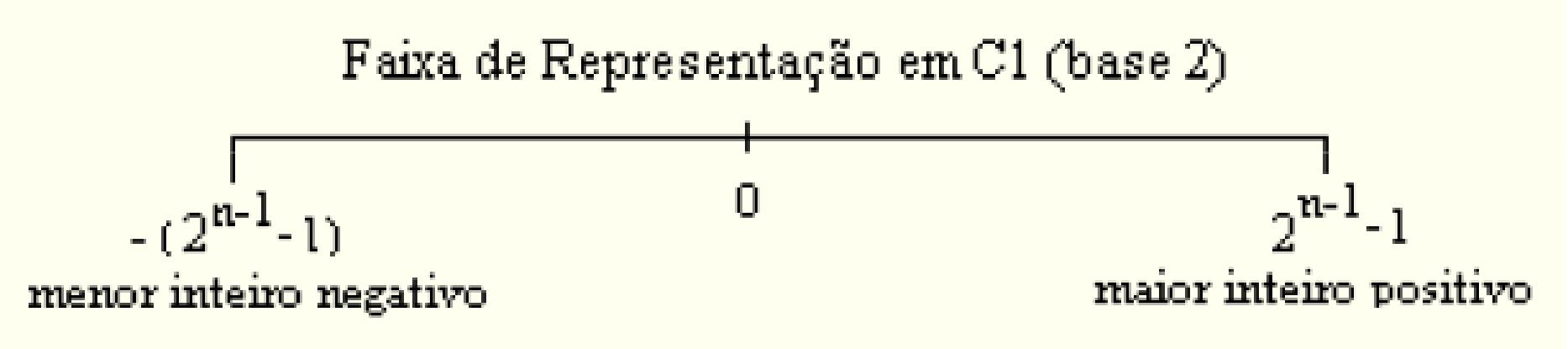
Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**

- Como na representação sinal de magnitude, o "complemento para um" tem **duas representações para o 0**: 00000000 (+0) e 10000000 (-0). Na prática, este zero negativo, quando detectado é transformado em zero normal.

Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**



Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**

Decimal (positivo)	Binário (se o número é positivo, não há alteração)	Decimal (negativo)	Binário (em C1)
0	0000	0	1111
1	0001	-1	1110
2	0010	-2	1101
3	0011	-3	1100
4	0100	-4	1011
5	0101	-5	1010
6	0110	-6	1001
7	0111	-7	1000

Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**
- Exercício:
- Calcule o complemento a 1 dos números abaixo:
- 101011
- 0101011
- 011010

Representação de números com sinal

- **Caso particular: números na base 2 -> complemento a (base -1) = complemento a 1**
- Exercício:
- Calcule o complemento a 1 dos números abaixo:
- 101011 = 010100 (C1)
- 0101011 = 1010100 (C1)
- 011010 = 100101 (C1)

Representação de números com sinal

- **Aritmética em complemento a (base -1)**
- **A subtração** (ou soma de um número positivo com um número negativo) **se transforma, nesta representação, em uma soma em complemento**, isto é, a soma dos complementos do número negativo com o número positivo;

Representação de números com sinal

- **Aritmética em complemento a (base -1)**
- Portanto, uma subtração pode ser realizada simplesmente através da soma dos números "complementados";
- **Se o número é positivo, mantenha-o; se o número é negativo, complemente-o; e aí, é só somar.**
- No entanto, continuamos com **duas representações para o zero**.

Representação de números com sinal

- **Representação de números negativos em complemento a base**
- A representação dos números inteiros negativos em complemento a base é obtida subtraindo-se da base cada algarismo do número. Por ex., base 10 com 3 dígitos: 1000 - x

Representação de números com sinal

- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**
- Subtrair cada algarismo de 1 (complemento a 1) e depois somar 1 ao resultado.
- Assim, conforme mencionado anteriormente, para obter o C1 de um número binário, basta inverter todos os bits.
- E para obter o C2 de um número **obtemos primeiro o C1 (invertendo os bits) e depois somamos 1 ao resultado**.

Representação de números com sinal

- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**
- Ex: calcular o complemento a 2 (C2) de um número binário 0011 com 4 dígitos:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1111 \\
- & \underline{0011} \\
 & 1100\ (C1) \\
+ & \underline{0001} \\
 & 1101\ (C2)
\end{array}
$$

Representação de números com sinal

- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**

Decimal (positivo)	Binário (se o número é positivo, não há alteração)	Decimal (negativo)	Binário (C2)
0	0000	-1	1111
1	0001	-2	1110
2	0010	-3	1101
3	0011	-4	1100
4	0100	-5	1011
5	0101	-6	1010
6	0110	-7	1001
7	0111	-8	1000

Representação de números com sinal

- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**
- Os números são escritos da seguinte forma:
- Positivos: Sua magnitude é representada na sua forma binária direta, e um bit de sinal 0 é colocado na frente do MSB.
- Exemplos: 0001 (+1), 0100 (+4) e 0111 (+7)

Representação de números com sinal

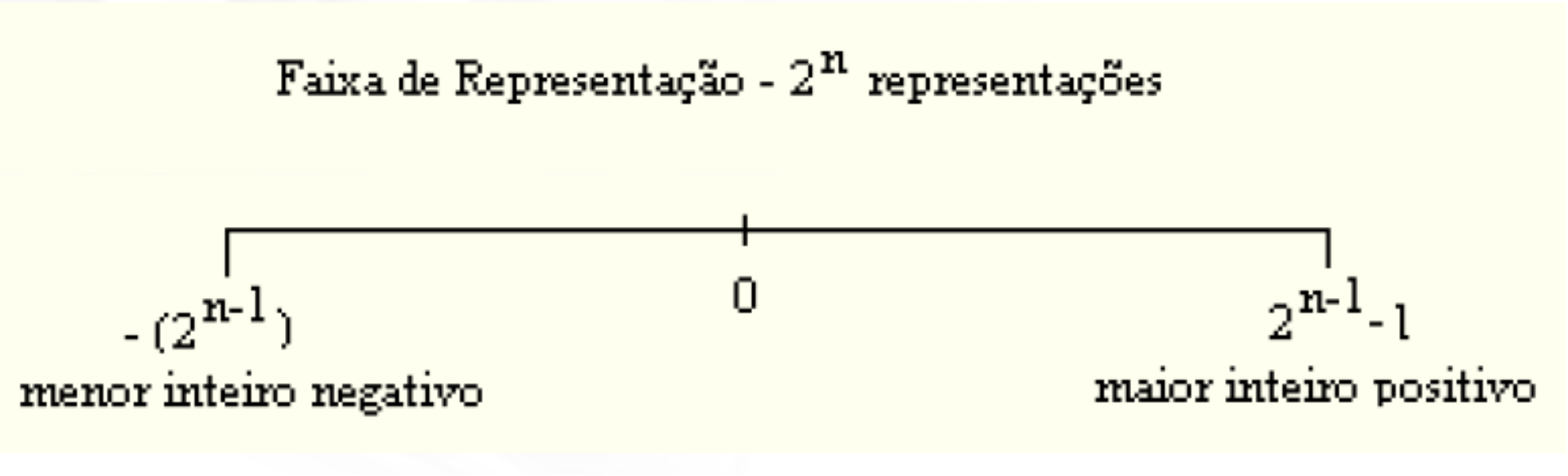
- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**
- Negativos: Sua magnitude é representada na forma de complemento a 2.
- **O complemento a 2 já leva o sinal negativo em consideração!**
- Em C2 **não há duas representações para o valor 0** e consequentemente abriu-se lugar para mais uma representação.

Representação de números com sinal

- As vantagens do uso do complemento de 2 é que **existe somente um zero e que as regras para soma e subtração são as mesmas**.
- A desvantagem é o fato de ser um onde o número de representações negativas é maior que o número de representações positivas. Por exemplo, com oito bits em complemento para 2 podemos representar os números decimais de -128 a +127.

Representação de números com sinal

- **Caso particular: base 2 (complemento a 2)**



Representação de números com sinal

- **Aritmética de complemento a base**

- Na aritmética em complemento a base, basta somar os números, sendo que um número negativo será representado por seu complemento a base.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- A adição de dois números nesse sistema de representação segue duas regras:
- Some os dois números e observe se ocorre o carry (vai 1) **sobre** o bit de sinal e se ocorre o carry **após o bit de sinal**.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Se ocorrer **um e somente um** dos dois carry, então **houve estouro**; caso contrário o resultado da soma está dentro do campo de definição.
- Obs: A subtração em complemento de 2 é realizada através da soma de n°s negativos.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**

- Exemplos para n = 4 bits

```
  0 1 0 1      5
  0 1 1 0      6
+ _______    ____
  1 0 1 1     11
```

Carry sobre o bit de sinal
-> **estouro = overflow**

```
  0 1 0 1      5
  0 0 1 0      2
+ _______    ____
  0 1 1 1      7
```

Não houve *Carry* = **não overflow**

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**

0 1 0 1	5
+1 0 1 0	-6
1 1 1 1	-1

Não houve *Carry* = **não overflow**

0 1 1 0	6
+1 0 1 1	-5
0 0 0 1	1

Carry sobre o "bit de sinal" e após ele = **não overflow**

1 0 1 1	-5
+1 0 1 0	-6
0 1 0 1	-11

Carry somente após o "bit de sinal" = **overflow**

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Em qualquer sistema de complemento de dois, existe sempre um limite para o tamanho dos números a serem representados.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Exemplo: quando usamos complemento de dois com padrões de quatro bits (um para o sinal), ao valor 9 não está associado padrão algum; por isso não conseguimos obter uma resposta certa para a soma 5 + 4, o resultado apareceria como -7.

Representação de números com sinal

- Subtração = Somar usando representação em C2
- Ex: 5 - 3 = 2 (utilização de 4 bits)

$$3_{10} = 0\ 0\ 1\ 1_2$$
$$-3_{10} = 1\ 1\ 0\ 1_2$$

$$\begin{array}{r} 0\ 1\ 0\ 1_2 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 1_2 \\ \hline (1)\ 0\ 0\ 1\ 0_2 \end{array}$$

- O bit mais significativo (decorrente do último “vai um”) deve ser desprezado pois houve carry sobre o bit de sinal e após ele.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Para saber se o resultado está correto (se a soma em binário equivale à soma em decimal), fazemos a soma usando o complemento, depois pegamos o resultado e invertemos (exceto o bit de sinal) e somamos 1. O valor resultante é então convertido para decimal com sinal e magnitude e pode ser conferido.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Exemplo: Somar 1100 e 1101
- Os números são negativos e estão representados em C2. Para sabermos seu valor decimal, precisamos convertê-los para a representação em sinal-magnitude. Neste caso, teremos que inverter os bits da magnitude e somar 1 ao resultado:
- 1100 -> 1011 -> 1011 + 1 = 1100 = $-4_{(10)}$
- 1101 -> 1010 -> 1010 + 1 = 1011 = $-3_{(10)}$

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**

- Exemplo: Somar 1100 e 1101

O resultado está correto pois houve "vai 1" para o bit de sinal e para depois dele

- 11
- 1100
- +1101
- -------
- 1001

- O resultado é um valor negativo representado em C2. Passando para Sinal-Magnitude:

  1001 -> 1110 -> 1110 + 1 = 1111 = $-7_{(10)}$

- Logo, a operação está correta.

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Exercício: Realize as seguintes operações em complemento de 2 ocupando 6 bits:
- a) 05 + 12
- b) 13 - 09
- c) 17 - 31
- d) -12 – 08
- e) -26 + 10

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- Exercício: Realize as seguintes operações em complemento de 2 ocupando 6 bits:
- a) 05 + 12 = 000101 + 001100 = 010001 = +17
- b) 13 - 09 = 001101 + 010111(C2) = 000100 = +4

Representação de números com sinal

- **Aritmética em Complemento a 2**
- c) 17 - 31 = 010001 + 100001(C2) = 110010; inverte desconsiderando o bit de sinal e soma 1 = 101110 = -14
- d) -12 – 08 = 110100(C2) + 111000(C2) = 101100; inverte desconsiderando o bit de sinal e soma 1 = 110100 = -20
- e) -26 + 10 = 10 - 26 = 001010 + 100110(C2) = inverte desconsiderando o bit de sinal e soma 1 = 110000 = -16

Representação de números com sinal

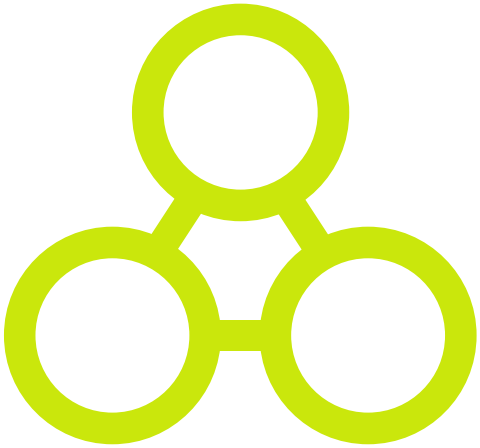
- **Overflow**
- Quando uma soma de dois números de n algarismos resulta em um valor com n+1 algarismos, ocorre o **overflow**.
- Se a soma foi realizada em sinal e magnitude, a ocorrência de overflow é detectada pelo bit “vai um” após o último bit de magnitude à esquerda.

Representação de números com sinal

- **Overflow**
- Porém, na soma por complemento, os algoritmos acarretam a modificação completa do resultado se ocorrer overflow. Isso ocorre porque as somas em complemento incluem também a soma dos bits de sinal; o “vai um” para o bit de sinal, somado a eles, modifica seu valor, alterando a natureza do número.

Representação de números com sinal

- **Resumo da Aritmética em Complemento a 2**
- 1) As operações de soma são realizadas normalmente em sinal-magnitude;
- 2) As operações de subtração são realizadas como soma de complemento;
- 3) Se o resultado é um valor positivo, então o valor decimal correspondente da magnitude é obtido pela conversão da base 2 para a base 10;
- 4) Se o resultado é um valor negativo, deve-se primeiro converter esse valor para sinal-magnitude (inverter os bits da magnitude e somar 1), e depois converter da base 2 para a base 10.



Introdução à Computação

Jordana Sarmenghi Salamon
jssalamon@inf.ufes.br
jordanasalamon@gmail.com
http://inf.ufes.br/~jssalamon

Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo