

Lista de Exercícios de Revisão

Programação Dinâmica

1. Forneça uma formulação recursiva para os problemas abaixo:
 - a) Produzir troco para n centavos usando o menor número de moedas possível
 - b) Programação de linha de montagem
 - c) Multiplicação de cadeias de matrizes
 - d) Subseqüência comum mais longa
 - e) Árvore de pesquisa binária ótima
 - f) O problema de seleção de atividades
 - g) Caminho mais curto de todos os pares

Algoritmos Gulosos

2. Forneça um exemplo para mostrar que as estratégias gulosas abaixo não funcionam para o *problema de seleção de atividades* (i.e., não produzem um conjunto de tamanho máximo de atividades mutuamente compatíveis).
 - a) Selecionar a atividade de menor duração entre aquelas que são compatíveis com atividades selecionadas anteriormente.
 - b) Selecionar a atividade que se superpõe ao menor número de outras atividades (sujeito à compatibilidade com as atividades já programadas).
 - c) Selecionar a atividade restante compatível com o horário de início que precede a qualquer outro horário de início.
3. O problema da mochila na versão fracionária tem a *propriedade da escolha gulosa*, i.e. pode ser resolvido por um algoritmo guloso. Descreva como resolver o problema usando uma estratégia gulosa.
4. Prove que o problema de produzir troco para n centavos usando o menor número de moedas possível possui *subestrutura ótima*.
5. Forneça um exemplo para mostrar que a estratégia gulosa de tomar o máximo possível do item com maior valor por kilo, não funciona para o *problema da mochila na versão inteira* 0 –1.
6. Explique como funciona o algoritmo HUFFMAN () que está apresentado no livro texto no capítulo 16.

Lista de Exercícios de Revisão

Árvores de amplitude mínima

7. Forneça um exemplo simples de um grafo conectado tal que o conjunto de arestas $\{(u, v) : \text{existe um corte } (S, V-S) \text{ tal que } (u, v) \text{ é uma aresta leve cruzando } (S, V-S)\}$ não forma uma árvore de amplitude mínima.

8. Dado um grafo G e uma árvore de amplitude mínima T , suponha que diminuíssemos o peso de uma das arestas em T . Mostre que T ainda é uma árvore de amplitude mínima para G . Mais formalmente, seja T uma árvore de amplitude mínima para G com pesos de arestas dados pela função peso w . Escolha uma aresta $(x, y) \in T$ e um número positivo k , e defina a função peso w' por:

$$w'(u, v) = \begin{cases} w(u, v), & \text{se } (u, v) \neq (x, y), \\ w(x, y) - k, & \text{se } (u, v) = (x, y). \end{cases}$$

Mostre que T é uma árvore de amplitude mínima para G com peso de arestas dados por w' .

Caminho mais curtos de única origem

9. Mostre como o algoritmo de Bellman-Ford pode ser usado para resolver um sistema de restrições de diferenças (ver Secção 24-2).

Caminhos mais curtos de todos os pares

10. Algoritmo de Johnson encontra caminhos mais curtos entre todos os pares. Para grafos esparsos, ele é assintoticamente melhor que a elevação ao quadrado repetida de matrizes ou o algoritmo de Floyd-Warshall. Explique como funciona o algoritmo de Johnson.

11. O algoritmo de Johnson emprega a técnica de *reponderação* das arestas. Mostre que a reponderação não altera caminhos mais curtos.

12. O professor Greenstreet afirma que existe um modo mais simples de reponderar arestas que o método usado no algoritmo de Johnson. Fazendo $w^* = \min_{(u, v) \in E} \{w(u, v)\}$ basta definir $\hat{w}(u, v) = w(u, v) - w^*$ para todas as arestas $(u, v) \in E$. O que está errado no método de reponderação do professor?

Lista de Exercícios de Revisão

Fluxo Máximo

13. Dado um fluxo em rede $G = (V, E)$, sejam f_1 e f_2 funções de $V \times V$ para $\mathbf{R}$. A soma de fluxo $f_1 + f_2$ é a função de $V \times V$ para $\mathbf{R}$ definida por:

$$(f_1 + f_2)(u, v) = f_1(u, v) + f_2(u, v)$$

para todo $u, v \in V$. Se f_1 e f_2 são fluxos em G , quais das três propriedades de fluxo devem ser satisfeitas pela soma de fluxo f_1 e f_2 , e quais ela poderia violar?

14. Seja f um fluxo em uma rede, e seja α um número real. O produto de fluxo escalar α é uma função de $V \times V$ para $\mathbf{R}$ definida por: $(\alpha.f)(u, v) = \alpha.f(u, v)$. Prove que os fluxos em uma rede formam um conjunto convexo. Isto é, mostre que, se f_1 e f_2 são fluxos, então $\alpha.f_1 + (1 - \alpha)f_2$ também é um fluxo para todo α no intervalo $0 \leq \alpha \leq 1$.

15. Prove que, para qualquer par de vértices u e v e quaisquer funções de capacidade e de fluxo c e f temos $c_f(u, v) + c_f(v, u) = c(u, v) + c(v, u)$.

16. Execute o algoritmo de Ford-Fulkerson sobre o fluxo em rede da Figura 26.8(b) do livro texto e mostre a rede residual após cada ampliação de fluxo. Numere os vértices em L de cima para baixo, desde 1 até 5, e em R de cima para baixo desde 6 até 9. Para cada iteração, escolha o caminho em ampliação que seja lexicograficamente menor.