



Estruturas de Informação Aula 15: Árvores

02/06/2008

Fontes Bibliográficas



- Livros:
 - Introdução a Estruturas de Dados (Celes, Cerqueira e Rangel): Capítulo 13;
 - Projeto de Algoritmos (Nivio Ziviani): Capítulo 5;
 - Estruturas de Dados e seus Algoritmos (Szwarcfiter, et. al): Capítulo 3;
 - Algorithms in C (Sedgewick): Capítulo 5;
- Slides baseados no material da PUC-Rio, disponível em <http://www.inf.puc-rio.br/~inf1620/>.

Introdução

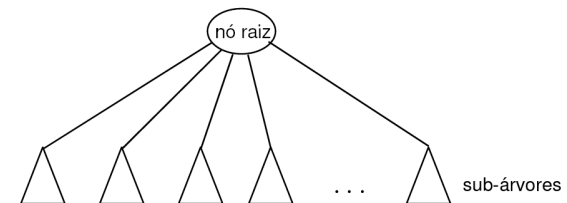


- Estruturas estudadas até agora não são adequadas para representar dados que devem ser dispostos de maneira hierárquicas
 - Ex., hierarquia de pastas
 - Árvore genealógica
- Árvores são estruturas adequadas para representação de hierarquias

Definição Recursiva de Árvore



- Um conjunto de nós tal que:
 - existe um nó r , denominado *raiz*, com zero ou mais sub-árvores, cujas raízes estão ligadas a r
 - os nós raízes destas sub-árvores são os *filhos* de r
 - os *nós internos* da árvore são os nós com filhos
 - as *folhas* ou *nós externos* da árvore são os nós sem filhos

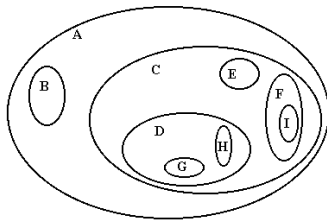


Formas de representação

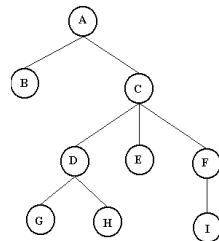


- Representação por parênteses aninhados
 - (A (B) (C (D (G) (H)) (E) (F (I)))))

Diagrama de Inclusão



Representação Hierárquica



Subárvore

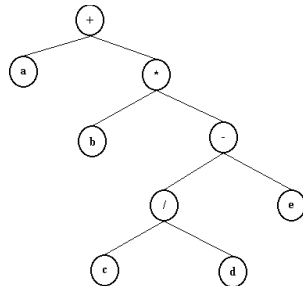


- Seja a árvore acima $T = \{A, B, \dots\}$
- A árvore T possui duas subárvores:
 - T_b e T_c onde $T_b = \{B\}$ e $T_c = \{C, D, \dots\}$
- A subárvore T_c possui 3 subárvores:
 - T_d , T_f e T_e onde $T_d = \{D, G, H\}$, $T_f = \{F, I\}$, $T_e = \{E\}$
- As subárvores T_b , T_e , T_g , T_h , T_i possuem apenas o nó raiz e nenhuma subárvore.

Exemplo (árvore de expressão)



- Representação da expressão aritmética:
 - (a + (b * (c / d - e)))



Conceitos Básicos



- Nós filhos, pais, tios, irmãos e avô
- Grau de saída (número de filhos de um nó)
- Nó folha (grau de saída nulo) e nó interior (grau de saída diferente de nulo)
- Grau de uma árvore (máximo grau de saída)
- Floresta (conjunto de zero ou mais árvores)

Conceitos Básicos (2)

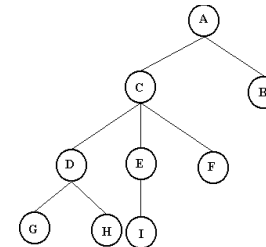


- Caminho
 - Uma sequência de nós distintos v_1, v_2, \dots, v_k , tal que existe sempre entre nós consecutivos (isto é, entre v_1 e v_2 , entre v_2 e $v_3, \dots, v_{(k-1)}$ e v_k) a relação "é filho de" ou "é pai de" é denominada um caminho na árvore.
- Comprimento do Caminho
 - Um caminho de k vértices é obtido pela sequência de $k-1$ pares. O valor $k-1$ é o comprimento do caminho.
- Nível ou profundidade de um nó
 - número de nós do caminho da raiz até o nó. O nível da raiz, é portanto, 1.

Conceitos Básicos (3)



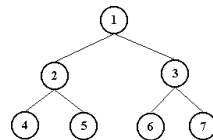
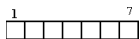
- Nível da raiz (profundidade) é 1.
- Árvore Ordenada: é aquela na qual filhos de cada nó estão ordenados. Assume-se ordenação da esquerda para a direita. Esta árvore é ordenada?



Conceitos Básicos (4)



- Árvore Cheia: Uma árvore de grau d é uma árvore cheia se possui o número máximo de nós, isto é, todos os nós têm número máximo de filhos exceto as folhas, e todas as folhas estão na mesma altura.
- Árvore cheia de grau 2: implementação sequencial.



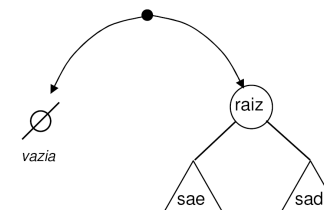
Armazenamento por nível:

posição do nó	posição dos filhos do nó
1	2,3
2	4,5
3	6,7
i	$(2i, 2i+1)$

Árvore Binária



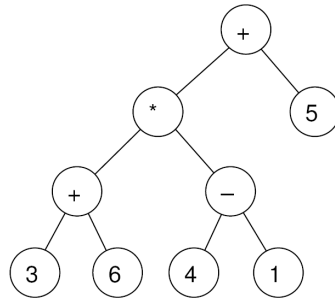
- Uma árvore em que cada nó tem zero, um ou dois filhos
- Uma árvore binária é:
 - uma árvore vazia; ou
 - um nó raiz com duas sub-árvores:
 - a subárvore da direita (sad)
 - a subárvore da esquerda (sae)



Exemplo



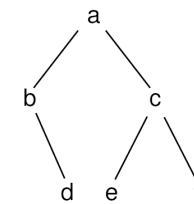
- Árvore binária representando expressões aritméticas binárias
 - Nós folhas representam os operandos
 - Nós internos representam os operadores
 - $(3+6)*(4-1)+5$



Árvores Binárias



- Notação textual
 - a árvore vazia é representada por <>
 - árvores não vazias por <raiz sae sad>
- Exemplo:
 - <a <b <> <d <> <>>> > <c <e <> <>>> <f <> <>>>> >



Árvores Binárias – Implementação em C



- Representação: ponteiro para o nó raiz
- Representação de um nó na árvore:
 - Estrutura em C contendo
 - A informação propriamente dita (exemplo: um caractere, ou inteiro)
 - Dois ponteiros para as sub-árvores, à esquerda e à direita

```
struct arv {  
    char info;  
    struct arv* esq;  
    struct arv* dir;  
};
```

TAD Árvores Binárias – Impl. em C (arv.h)

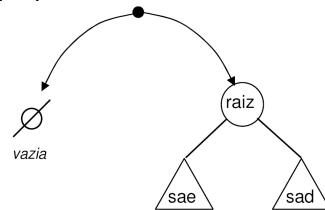


```
typedef struct arv Arv;  
//Cria uma árvore vazia  
Arv* arv_criavazia (void);  
//cria uma árvore com a informação do nó raiz c, e  
//com subárvore esquerda e e subárvore direita d  
Arv* arv_cria (char c, Arv* e, Arv* d);  
//libera o espaço de memória ocupado pela árvore a  
Arv* arv_libera (Arv* a);  
//retorna true se a árvore estiver vazia e false  
//caso contrário  
int arv_vazia (Arv* a);  
//indica a ocorrência (1) ou não (0) do caracter c  
int arv_pertence (Arv* a, char c);  
//imprime as informações dos nós da árvore  
void arv_imprime (Arv* a);
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- Implementação das funções:
 - implementação em geral recursiva
 - usa a definição recursiva da estrutura
- Uma árvore binária é:
 - uma árvore vazia; ou
 - um nó raiz com duas sub-árvores:
 - a sub-árvore da direita (sad)
 - a sub-árvore da esquerda (sae)



TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função arv_criavazia
 - cria uma árvore vazia

```
Arv* arv_criavazia (void){  
    return NULL;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função arv_cria
 - cria um nó raiz dadas a informação e as duas sub-árvores, a da esquerda e a da direita
 - retorna o endereço do nó raiz criado

```
Arv* arv_cria (char c, Arv* sae, Arv* sad){  
    Arv* p=(Arv*)malloc(sizeof(Arv));  
    p->info = c;  
    p->esq = sae;  
    p->dir = sad;  
    return p;  
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- arv_criavazia e arv_cria
 - as duas funções para a criação de árvores representam os dois casos da definição recursiva de árvore binária:
 - uma árvore binária Arv* a;
 - é vazia a=arv_criavazia()
 - é composta por uma raiz e duas sub-árvores a=arv_cria(c,sae,sad);

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_libera`
 - libera memória alocada pela estrutura da árvore
 - as sub-árvores devem ser liberadas antes de se liberar o nó raiz
 - retorna uma árvore vazia, representada por `NULL`

```
Arv* arv_libera (Arv* a){
    if (!arv_vazia(a)){
        arv_libera(a->esq); /* libera sae */
        arv_libera(a->dir); /* libera sad */
        free(a); /* libera raiz */
    }
    return NULL;
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_vazia`
 - indica se uma árvore é ou não vazia

```
int arv_vazia (Arv* a){
    return a==NULL;
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_pertence`
 - verifica a ocorrência de um caractere `c` em um dos nós
 - retorna um valor booleano (1 ou 0) indicando a ocorrência ou não do caractere na árvore

```
int arv_pertence (Arv* a, char c){
    if (arv_vazia(a))
        return 0; /* árvore vazia: não encontrou */
    else
        return a->info==c ||
            arv_pertence(a->esq,c) ||
            arv_pertence(a->dir,c);
}
```

TAD Árvores Binárias – Implementação em C



- função `arv_imprime`
 - percorre recursivamente a árvore, visitando todos os nós e imprimindo sua informação

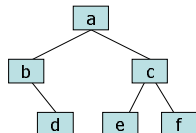
```
void arv_imprime (Arv* a){
    if (!arv_vazia(a)){
        printf("%c ", a->info); /* mostra raiz */
        arv_imprime(a->esq); /* mostra sae */
        arv_imprime(a->dir); /* mostra sad */
    }
}
```

Exemplo



- Criar a árvore <a <b <> <d <><>> > <c <e <><> > <f <><> > > >

```
/* sub-árvore 'd' */
Arv* a1= arv_cria('d',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'b' */
Arv* a2= arv_cria('b',arv_criavazia(),a1);
/* sub-árvore 'e' */
Arv* a3= arv_cria('e',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'f' */
Arv* a4= arv_cria('f',arv_criavazia(),arv_criavazia());
/* sub-árvore 'c' */
Arv* a5= arv_cria('c',a3,a4);
/* árvore 'a' */
Arv* a = arv_cria('a',a2,a5 );
```

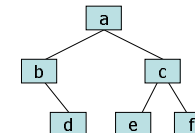


Exemplo



- Criar a árvore <a <b <> <d <><>> > <c <e <><> > <f <><> > > >

```
Arv* a = arv_cria('a',
    arv_cria('b',
        arv_criavazia(),
        arv_cria('d', arv_criavazia(), arv_criavazia())
    ),
    arv_cria('c',
        arv_cria('e', arv_criavazia(), arv_criavazia()),
        arv_cria('f', arv_criavazia(), arv_criavazia())
    )
);
```

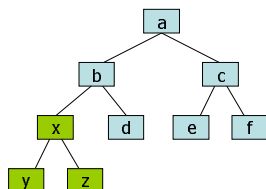


Exemplo



- Acrescenta nós x, y e z

```
a->esq->esq =
    arv_cria('x',
        arv_cria('y',
            arv_criavazia(),
            arv_criavazia()),
        arv_cria('z',
            arv_criavazia(),
            arv_criavazia())
    );
```

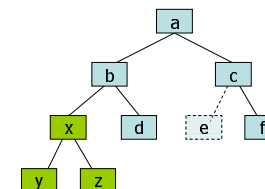


Exemplo



- Libera nós

```
a->dir->esq = arv_libera(a->dir->esq);
```



Compressão de Arquivos



- Codificação de Huffman

Próxima Aula



- Travessia e busca em uma árvore binária.