

Sistemas Lineares

Métodos Diretos (Revisão)

Métodos Iterativos Estacionários (Revisão)

Lucia Catabriga e Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Otimização e Modelagem Computacional
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Métodos Diretos

- 1 Introdução
- 2 Substituição Regressiva
- 3 Eliminação de Gauss
- 4 Pivoteamento Parcial
- 5 Fatoração LU
- 6 Aplicações
- 7 Matrizes Esparsas × Métodos Diretos

Introdução

- Encontra a **solução exata** a menos de erros de ponto flutuante.
- A idéia dos métodos é transformar o sistema em um sistema trivial (**sistema triangular**).
- A **complexidade** é em torno de n^3 (número de operações de ponto flutuante).
- Em certos casos, métodos diretos não são eficientes, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma **matriz esparsa** (muitos elementos iguais a zero) e de grande porte.

Sistema linear $n \times n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

a_{ij} = coeficientes, b_j = constantes, x_j = **variáveis** ($i, j = 1, \dots, n$)

Na **forma matricial** $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Substituição Regressiva

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Substituição Regressiva

Sistema triangular superior $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Assuma que o sistema tem solução única: $a_{ij} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned} a_{nn} x_n &= b_n \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ a_{n-1,n-1} x_{n-1} + a_{n-1,n} x_n &= b_{n-1} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n}{a_{n-1,n-1}} \\ \text{linha } i \Rightarrow x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j}{a_{ii}} \end{aligned}$$

Algoritmo para a substituição regressiva: $x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}}$

Data: A,b,n

Result: x

for $i=n,1,-1$ **do**

 soma = b[i];

for $j=i+1,n,1$ **do**

 soma = soma - a[i][j] * x[j];

end

 x[i] = soma/a[i][i];

end

Esforço computacional (Nº de operações (+,-,x,/) ou flops):

divisão: n

subtração e multiplicação: $2 \sum_{j=1}^{n-1} j = 2n(n-1)/2$

total = n^2

Idéia do método:

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

operações de linhas elementares

onde \tilde{A} é uma matriz triangular superior.

Idéia do método:

$$Ax = b \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{b}$$

operações de linhas elementares

onde \tilde{A} é uma matriz triangular superior.

Operações de linhas elementares:

- trocar a ordem de duas equações;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- somar uma equação à outra.

Observação: A eliminação deve ser feita **de forma sistemática**, ou seja, usando uma sequência de operações elementares de modo a transformar um sistema linear em um outro equivalente, onde a matriz é triangular superior.

Algoritmo para a **Eliminação de Gauss**:

Passo k : Eliminar os coeficientes da k -ésima coluna abaixo da diagonal ($1 \leq k \leq n - 1$)

Operação sobre a **Linha i** :

$$L_i \leftarrow L_i - m_{ik} L_k \text{ onde } m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}, \quad k + 1 \leq i \leq n$$

$$\Rightarrow a_{ij} \leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj}, \quad k + 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow b_i \leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k$$

Data: A,b,n

Result: x

```
for k=1,n-1 do
  for i=k+1,n do
    fator = a[i][k] / a[k][k];
    for j=k+1,n do
      a[i][j] = a[i][j] - fator * a[k][j];
    end
    b[i] = b[i] - fator * b[k]
  end
end
```

Esforço computacional:

adição e subtração: $n^3/3 + O(n)$

multiplicação e divisão: $n^3/3 + O(n^2)$

total = $2n^3/3 + O(n^2)$

Obs: $O(m^n)$ significa “termos de ordem m^n e menores”.

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ij} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ii} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

$$Ly = b \tag{1}$$

$$Ux = y \tag{2}$$

A Ideia Básica da Decomposição LU

Seja $Ax = b$, supor que exista:

- L matriz triangular inferior com $l_{ij} = 1$
- U matriz triangular superior

tal que:

$$A = LU$$

$$LUx = b$$

$$Ly = b \tag{1}$$

$$Ux = y \tag{2}$$

Como encontrar os fatores L e U ?

U : matriz resultante da eliminação de Gauss ($a_{ij} = a_{ij} - f_{ik}a_{kk}$)

L : multiplicadores ($f_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$)

$$[A] \rightarrow [L][U]$$

onde

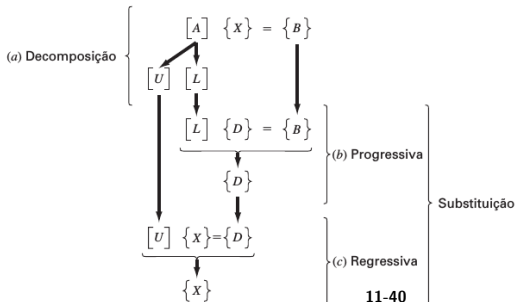
$$[U] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

e

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ij} - f_{ik} a_{kk}$$

$$f_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$



- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b$$

- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb$$

- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y$$

- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb$$

- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb$$

- 1 $Ly = Pb$, Substituição **Progressiva** e determino y ;

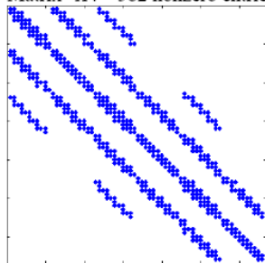
- Processo de **Substituição**:

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb$$

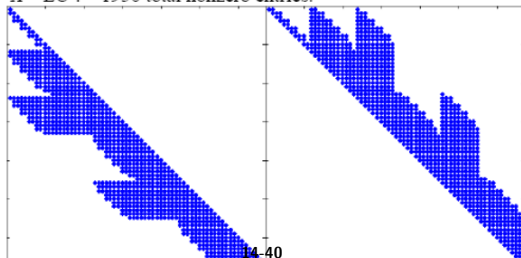
$$Ux = y, \text{ então } Ly = Pb$$

- 1 $Ly = Pb$, Substituição **Progressiva** e determino y ;
- 2 $Ux = y$, Substituição **Regressiva** e determino a solução x .

Matrix A : 582 nonzero entries.



$A = LU$: 1950 total nonzero entries.



Esporço Computacional:

Eliminação Progressiva: $2n^3/3 + O(n^2)$

Substituição Regressiva: n^2

n	Elim.	Subst.	Flops	$2n^3/3$	% Elim.
10	705	100	805	667	87.58%
100	671550	10000	681550	666667	98.53%
1000	6.67×10^8	1×10^6	6.68×10^8	6.67×10^8	99.85%

- O tempo de computação cresce bastante à medida que o sistema fica maior. A quantidade de flops cresce quase três ordens de grandeza para cada aumento na ordem de grandeza da dimensão;
- A maior parte do esforço vem da parte da eliminação. Esforços para melhorar o algoritmo devem se concentrar neste passo.

Sistemas **mal condicionados** são aqueles onde pequenas modificações nos coeficientes ou constantes do sistemas resultam em grandes modificações na solução.

ou

Uma outra interpretação é que uma grande quantidade de respostas pode aproximadamente satisfazer as equações.

Exemplo 1: solução exata = $(4, 3)^T$

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$1.1x_1 + 2x_2 = 10.4$$

Exemplo 2: solução exata = $(8, 1)^T$

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$1.05x_1 + 2x_2 = 10.4$$

Observação:

- A maioria dos sistemas derivados de problemas de engenharia são naturalmente bem condicionados.
- Resíduo pequeno pode não representar uma boa aproximação para a solução. No Exemplo 2 a solução exata $= (8, 1)^T$ e o resíduo para $\hat{x} = (4, 3)^T$ é $r = b - A\hat{x} = (0, 0.2)^T$ parece pequeno, mas a solução está muito longe da solução exata.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 10 \\1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4\end{aligned}$$

- O determinante também não é um bom indicador do mal condicionamento de um sistema. Exemplo 1 o determinante é -0.2 e no Exemplo 2 é -0.1 .

Um bom indicador para o mal condicionamento de um sistema, $Ax = b$, é o **número de condição (ou número de condicionamento)** da matriz A , definido a partir da norma de A e da norma de A^{-1} :

$$K = \text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Perturbações em A :

Vamos analisar a influência que **perturbações dos dados de entrada**, $\delta A = \tilde{A} - A$, podem provocar na solução do sistema. Seja $\tilde{A}\bar{x} = b$.

$$x = A^{-1}b = A^{-1}(\tilde{A}\bar{x}) = A^{-1}(A + \tilde{A} - A)\bar{x}$$

$$\rightarrow x = \bar{x} + A^{-1}(\tilde{A} - A)\bar{x}$$

$$\rightarrow \delta x = x - \bar{x} = A^{-1}\delta A \bar{x}$$

$$\rightarrow \|\delta x\| = \|x - \bar{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|\bar{x}\|$$

$$\rightarrow \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

Perturbações em b :

Assimindo que o vetor \tilde{b} contem perturbações δb :

$$A^{-1}\tilde{b} = \bar{x} \Rightarrow \|A^{-1}\|\|\tilde{b}\| \geq \|\bar{x}\|$$

$$\delta b = A\delta x \Rightarrow \|\delta b\| \leq \|A\|\|\delta x\|$$

$$A\bar{x} = \tilde{b} \Rightarrow \|A\|\|\bar{x}\| \geq \|\tilde{b}\|$$

$$\delta x = A^{-1}\delta b \Rightarrow \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|\|\tilde{b}\|} \leq \frac{1}{\|\bar{x}\|} \text{ e } \frac{1}{\|A\|\|\bar{x}\|} \leq \frac{1}{\|\tilde{b}\|} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\|A^{-1}\|} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|\tilde{b}\|} \right) \leq \|A\| \frac{\|\delta x\|}{\|\bar{x}\|} \text{ e } \frac{1}{\|A\|} \left(\frac{\|\delta x\|}{\|\bar{x}\|} \right) \leq \|A^{-1}\| \left(\frac{\|\delta b\|}{\|\tilde{b}\|} \right) \quad (2)$$

¹se a e b são positivos e $a \leq b$, então $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

²se a, b, c e d são positivos e $a > b$ e $c > d$, então $ab > cd$

O **número de condição** de uma matriz A é definido por:

$$K = \text{cond}(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$$

Assim podemos concluir que:

$$\frac{1}{K} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|\tilde{b}\|} \right) \leq \left(\frac{\|\delta x\|}{\|\bar{x}\|} \right) \leq K \left(\frac{\|\delta b\|}{\|\tilde{b}\|} \right)$$

Número de Condicionamento no Octave

Considere o exemplo clássico de matriz mal-condicionada, matriz de Hilbert $h_{ij} = 1/(i + j - 1)$. A função do Octave abaixo tem por objetivo mostrar como a propagação dos erros de arredondamento prejudicam a confiabilidade nos resultados dos métodos diretos:

```
function [error_x, Keps, Kerror_b, nresiduo] = avaliacond(n);  
    H = hilb(n);  
    b = H*ones(n);  
    x = H\b;  
    dx = ones(n)-x;  
    db = H*dx;  
    nb = norm(db,inf)/norm(b,inf);  
    error_x = norm(dx,inf)/norm(x,inf);  
    K = cond(H);  
    Keps = K*eps;  
    Kerror_b = K*nb;  
    nresiduo = norm(b-H*x,inf);  
endfunction
```

n	$\frac{\ \delta x\ }{\ \bar{x}\ }$	$K * eps$	$K \left(\frac{\ \delta b\ }{\ \bar{b}\ } \right)$	$\ r\ $	K
6	5.4048e-10	3.3198e-09	1.9196e-09	1.3323e-15	1.4951e+07
7	1.7371e-08	1.0555e-07	8.8106e-08	3.1086e-15	4.7537e+08
8	6.5516e-07	3.3879e-06	1.0023e-06	1.7764e-15	1.5258e+10
9	2.3183e-05	1.0950e-04	3.7413e-05	3.5527e-15	4.9315e+11
10	7.9948e-06	7.9948e-06	0.0035581	4.4409e-15	1.6024e+13
11	0.012950	0.11597	0.083193	4.4409e-15	5.2227e+14
12	0.0023275	3.8891	18.346	4.7962e-14	1.7515e+16
13	0.0048332	742.55	4355.9	5.1514e-14	3.3441e+18

Tabela: Erros para a matriz de Hilbert

$eps = 2.2204e-16$

$n = 12$ e 13 mensagem *matrix singular to machine precision*

Métodos Iterativos

- 1 Idéia dos métodos
- 2 Método de Gauss-Jacobi
- 3 Método de Gauss-Seidel
- 4 Convergência dos métodos
- 5 Método SOR

Introdução

- Encontra uma **solução aproximada** com precisão pré-fixada.
- O objetivo é transformar o sistema $Ax = b$ em uma **expressão recursiva** tal que $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$ para uma condição inicial $x^{(0)}$ conhecida.
- Depende de **critérios de convergência** relacionados a matriz de iteração M .
- A **complexidade**, por iteração, é em torno de n^2 (número de operações de ponto flutuante).
- Quando a matriz dos coeficientes é **esparsa**, somente os coeficientes não nulos necessitam ser armazenados.

Ideias Gerais

$$Ax = b \quad (3)$$

Isolar x , reescrevendo o sistema (3) da seguinte forma:

$$x = Mx + c \quad (4)$$

onde

$$M = \text{matriz } n \times n$$

$$c = \text{vetor } n \times 1$$

Defina o **processo iterativo** com $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c \quad (5)$$

Defina o **processo iterativo** com $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c \quad (5)$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$x^{(1)} = Mx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Mx^{(1)} + c$$

\vdots

Defina o **processo iterativo** com $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c \quad (5)$$

Dado $x^{(0)}$, usar (5) para calcular

$$x^{(1)} = Mx^{(0)} + c$$

$$x^{(2)} = Mx^{(1)} + c$$

$$\vdots$$

até que $e_{rel} = \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty}}{\|x^{(k+1)}\|_{\infty}} < \epsilon$ ou $k \geq k_{max}$ (**critério de parada**)

onde

ϵ = tolerância dada

k_{max} = número máximo de iterações dado

$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$ (norma do máximo)

Outro **critério de parada**: $\|r\| = \|b - Ax^{(k+1)}\| < \epsilon$,

Seja A um sistema $n \times n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \end{array}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

onde estamos assumindo que $a_{ij} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Seja A um sistema $n \times n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

onde estamos assumindo que $a_{ij} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}} [b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)]$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{22}} [b_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)]$$

\vdots

Método de Gauss-Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}) \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}) \right]$$

⋮

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{n3}x_3^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \right]$$

Para $k \geq 0$,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Ax = (E + D + F)x = b$$

$$\Rightarrow Dx = -(E + F)x + b$$

$$\Rightarrow Dx^{(k+1)} = -(E + F)x^{(k)} + b$$

Gauss-Jacobi:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b$$
$$= Mx^{(k)} + c$$

Método de Gauss-Seidel

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} + a_{14}x_4^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)}) \right]$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + a_{24}x_4^{(k)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)}) \right]$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{34}x_4^{(k)} + \dots + a_{3n}x_n^{(k)}) \right]$$

⋮

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \right]$$

Para $k \geq 0$,

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = E + D + F$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow Ax = (E + D + F)x = b$$
$$\Rightarrow (E + D)x = -Fx + b$$
$$\Rightarrow (E + D)x^{(k+1)} = -Fx^{(k)} + b$$

Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1}Fx^{(k)} + (E + D)^{-1}b$$
$$= Mx^{(k)} + c$$

A convergência da sequência gerada pelo método iterativo estacionário, $x^{k+1} = Mx^k + c$, é dada pelo **Teorema 1**, onde são fornecidas condições **necessárias e suficientes** de convergência.

Teorema 1: O método iterativo $x^{k+1} = Mx^k + c$ converge com qualquer x^0 se, e somente se, $\rho(M) < 1$, sendo $\rho(M)$ o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração M .

Observações:

- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do raio espectral. Quanto menor o raio espectral, mais rápida a convergência.
- A determinação do raio espectral da matriz de iteração $\rho(M)$ pode requerer maior esforço computacional que a própria solução do sistema $Ax = b$.

Teorema 2 (Critério das Linhas): É condição **suficiente** para a convergência dos métodos iterativos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A seja **diagonalmente dominante**, ou seja,

$$\alpha_i = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) / |a_{ii}| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Teorema 3 (Critério de Sassenfeld): É condição **suficiente** para a convergência do método iterativo de Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes A satisfaça

$$\beta_1 = \alpha_1 < 1$$

$$\beta_i = \frac{\left[\sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \beta_j + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}| \right]}{|a_{ii}|} < 1, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \omega(D + E + F)x = \omega b$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \omega(D + E + F)x = \omega b$$
$$(D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\(D - D)x + \omega(D + E + F)x &= \omega b \\(D + \omega E)x &= [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b\end{aligned}$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\(D - D)x + \omega(D + E + F)x &= \omega b \\(D + \omega E)x &= [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b\end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$(D + \omega E)x^{(k+1)} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\(D - D)x + \omega(D + E + F)x &= \omega b \\(D + \omega E)x &= [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b\end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned}(D + \omega E)x^{(k+1)} &= [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\Dx^{(k+1)} &= \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)}\end{aligned}$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\(D - D)x + \omega(D + E + F)x &= \omega b \\(D + \omega E)x &= [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b\end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned}(D + \omega E)x^{(k+1)} &= [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\Dx^{(k+1)} &= \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)} \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)x^{(k)}\end{aligned}$$

Método da **sobre-relaxação sucessiva** (SOR) para $0 < \omega < 2$:

$$\begin{aligned}Ax = b &\Rightarrow \omega(D + E + F)x = \omega b \\(D - D)x + \omega(D + E + F)x &= \omega b \\(D + \omega E)x &= [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b\end{aligned}$$

Dado $x^{(0)}$, calcular

$$\begin{aligned}(D + \omega E)x^{(k+1)} &= [(1 - \omega)D - \omega F]x^{(k)} + \omega b \\Dx^{(k+1)} &= \omega(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)Dx^{(k)} \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= \omega D^{-1}(-Ex^{(k+1)} - Fx^{(k)} + b) + (1 - \omega)x^{(k)}\end{aligned}$$

Observação: Para $\omega = 1$, temos o método de **Gauss-Seidel**:

$$x^{(k+1)} = -(E + D)^{-1}F x^{(k)} + (E + D)^{-1} b$$

Armazenamento de Matrizes Stencil

$$\begin{bmatrix} a & b & & & & \\ b & a & b & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b & a & b \\ & & & & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - bu_0 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n - bu_{n+1} \end{bmatrix} \quad A \text{ é tridiagonal} \quad \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ b & a & b \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b & a & b \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & d_3 & a_3 & 0 & c_3 & & & & & \\ e_4 & & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & & & & \\ & e_5 & & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 & & & \\ & & e_6 & & d_6 & a_6 & 0 & c_6 & & \\ & & & e_7 & & 0 & a_7 & b_7 & & \\ & & & & e_8 & & d_8 & a_8 & b_8 & \\ & & & & & e_9 & & d_9 & a_9 & \end{bmatrix} \Rightarrow AA = \begin{bmatrix} & a_1 & b_1 & c_1 & & & & & & \\ d_2 & a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ d_3 & a_3 & 0 & c_3 & & & & & & \\ e_4 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & & & & & \\ e_5 & d_5 & a_5 & b_5 & c_5 & & & & & \\ e_6 & d_6 & a_6 & 0 & c_6 & & & & & \\ e_7 & 0 & a_7 & b_7 & & & & & & \\ e_8 & d_8 & a_8 & b_8 & & & & & & \\ e_9 & d_9 & a_9 & & & & & & & \end{bmatrix}$$

A é Pentadiagonal

Armazenamento de Matrizes Esparsas - Formato CSR:

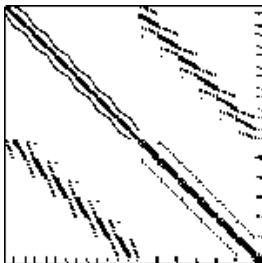
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

AA	1	1	5	3	4	6	7	8	9	3	6	2	5
JA	1	2	3	1	2	1	3	4	5	3	4	3	5
IA	1 4 6 10 12 14												

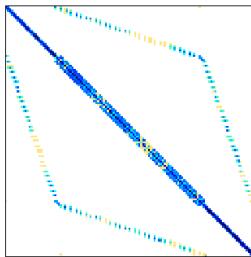
- n - ordem de A
- nnz - número de coeficientes não nulos
- $2nnz + n + 1$ - número de alocações para armazenar A
- $AA(k) = a_{ij}$, $JA(k) = j$, $IA(i) \leq k < IA(i + 1)$

Repositórios de matrizes Esparsas *Market Matrix*³ e *CISE*⁴

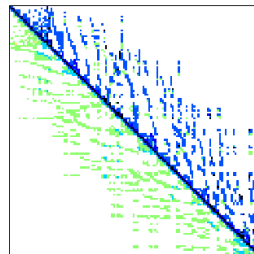
- Disponibilizam matrizes esparsas oriundas das mais variadas áreas para apoio a estudos de avaliação de matrizes esparsas em geral.
- Exemplos de matrizes depositadas nos repositórios:



(a) hor_131, $n = 434$, $\text{nnz} = 4710$



(b) FEM_3D_THERMAL1, $n = 17880$, $\text{nnz} = 430740$



(c) cage13, $n = 445315$, $\text{nnz} = 7479343$

³<http://math.nist.gov/MatrixMarket/>

⁴<http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/>

- Um dos formatos indicados para as matrizes é <nome>.mtx

```
%MatrixMarket matrix coordinate real symmetric
112 112 376
1 1 2.9696530325600e+08
4 1 4.5073393728200e+09
5 1 -2.9696530325600e+08
8 1 4.5073393728200e+09
2 2 2.9696530325600e+08
3 2 -4.5073393728200e+09
6 2 -2.9696530325600e+08
7 2 -4.5073393728200e+09
3 3 1.6723964696800e+11
6 3 4.5073393728200e+09
7 3 -3.0414852966400e+10
4 4 1.6723964696800e+11
5 4 -4.5073393728200e+09
8 4 -3.0414852966400e+10
5 5 3.9323795940500e+08
8 5 -4.1381337364900e+09
9 5 -9.6272656149300e+07
12 5 3.6920563633300e+08
6 6 3.9323795940500e+08
7 6 4.1381337364900e+09
10 6 -9.6272656149300e+07
```

- Todas as informações das matrizes podem ser obtidas navegando nas páginas de cada matriz.
- os coeficientes não nulos estão listados coluna a coluna.

Bibliografia Básica

- [1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.
- [2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.
- [3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.