**Programa de Pós-Graduação em Informática e em Engenharia Mecânica - UFES/CT**
**Disciplina: Elementos Finitos - 16/2**
**Exercício Computacional 1**
**Problemas de Valor no Contorno para problemas unidimensionais**

# Objetivo

O objetivo deste exercício é implementar pelo método dos elementos finitos problemas unidimensionais de valor no contorno considerando condições de contorno de valor prescrito, de fluxo prescrito e mista para funções de interpolação de ordem linear.

# Descrição

O problema de valor no contorno (PVC) unidimensional pode ser definido por:

*Dadas as funções $\kappa(x)$, $c(x)$, $b(x)$ e $f(x)$ contínuas em $(a, b)$, encontrar $u(x)$ tal que*

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right) + c(x)\frac{du}{dx} + b(x)u = f(x) \qquad a < x < b \tag{1}$$

*com condições de contorno do tipo:*

$$\begin{aligned} u(a) &= u_a \quad ou \\ u(b) &= u_b \quad ou \\ \alpha_a\frac{du(a)}{dx} + \beta_a u(a) &= \gamma_a \quad ou \\ \alpha_b\frac{du(b)}{dx} + \beta_b u(b) &= \gamma_b \end{aligned}$$

*onde $u_a$, $u_b$, $\alpha_a$, $\beta_a$, $\alpha_b$, $\beta_b$, $\gamma_a$ e $\gamma_b$ são constantes conhecidas do problema.*

O código deve ter uma estrutura modularizada levando em consideração os três grandes módulos:

- **Pré-processamento:** organização dos dados do problema, definição dos parâmetros do problema e das estruturas de dados a serem utilizadas. Neste módulo deve ser previsto:
  - leitura dos parâmetros de entrada : número de elementos ($nel$), domínio (($a, b$), parâmetros para tratamento do contorno ($u_a$, $u_b$, $\alpha_a$, $\beta_a$, $\alpha_b$, $\beta_b$, $\gamma_a$ e $\gamma_b$)
  - montagem da malha: cálculo do número de nós ($nnos$), definição dos nós (vetor $x$), cálculo do tamanho dos elementos ($h$)
  - inicialização das matrizes e vetores ($K$ - matriz global, $F$ - vetor dos termos independentes, $u$ - vetor solução)
  - definição das funções com dados materiais do (PVC), isto é, $\kappa(x)$, $c(x)$, $b(x)$ e $f(x)$. Estas funções devem ser alteradas para cada PVC.
- **Processamento:** montagem e solução do sistema linear resultante. Para cada elemento $e$ calcular:
  - coeficientes da matriz $k^e$
  - coeficientes do vetor $f^e$
  - Acumular os coeficientes locais nas posições globais do sistema linear resultante.
  - Aplicar as condições de contorno.
  - Calcular a solução do sistema linear resultante.
- **Pós-processamento:** gerar como saída do código o vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ e o vetor de aproximações $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^t$ para traçar o gráfico da solução aproximada.

### Detalhes de Implementação - Matriz $K^e$ e Vetor dos Termos independentes $F^e$ para cada elemento $e$

Considere o elemento genérico $e$ formado pelos nós $x_1^e$ e $x_2^e$ e as funções lineares locais $\psi_1^e$ e $\psi_2^e$. A matriz e o vetor dos termos independentes relativos ao elemento $e$ devem ser definidos por:

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega^e} (\kappa_1^e\psi_1 + \kappa_2^e\psi_2)\,\psi_i'\psi_j' d\Omega + \int_{\Omega^e} (c_1^e\psi_1 + c_2^e\psi_2)\,\psi_i\psi_j' d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^e} (b_1^e\psi_1 + b_2^e\psi_2)\,\psi_i\psi_j d\Omega \\ F_i^e &= \int_{\Omega^e} (f_1^e\psi_1 + f_2^e\psi_2)\,\psi_i d\Omega \quad \text{para } i,j = 1,2. \end{aligned}$$

onde $\kappa_i^e, c_i^e, b_i^e, f_i^e$ representam, respectivamente, o valor no nó $x_i^e$ das funções $\kappa(x), c(x), b(x), f(x)$. Note que em cada elemento $e$ as matrizes locais e o vetor dos termos independentes podem ser exatametne calculados.

## Validação

Defina problemas exemplos com solução conhecida para testar todas as particularidades do seu código.

Por exemplo, supondo $u(x) = x^3 - x + 1$, $k(x) = x$, $c(x) = 1$, $b(x) = x^2$, devemos definir $f(x) = x^5 - x^3 - 5x^2$ de modo que $u(x)$ seja a solução exata de (1). Considerando estas definições para os parâmetros físicos e as condições de contorno $u(0) = 1$ e $2u'(1) + u(1) = 5$, temos um PVC definido para testar a implementação.

Apresente a solução desse exemplo e de outros exemplos a serem elaborados por você para testar seu código, considerando:

- exemplos de PVC com os parâmetros físicos constantes e ir aumentando a complexidade do problema;
- uma variação do número de elementos, para observar se a medida que o número de elementos crescer seu código oferece soluções mais precisas.

## Aplicações

### Conservação de Calor em uma haste longa e fina

A conservação de calor em uma haste longa e fina (conforme Figura 1), considerando que a haste não esteja isolada e que o sistema esteja em estado estacionário, pode ser modelada pelo PVC:

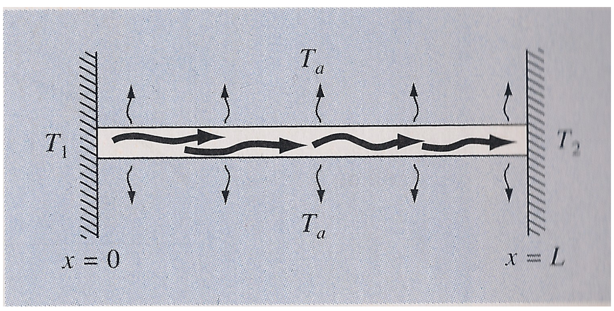


Figure 1: Geometria da haste longa e fina

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T}{dx^2} + K(T_a - T) &= 0 \text{ em } (0, L) \\
T(0) &= T_1 \\
T(L) &= T_2
\end{aligned}
$$

onde $K$ representa o coeficiente de transferência de calor que parametriza as taxas de dissipação de calor para o ar ($m^{-2}$) e $T_a$ é a temperatura do ar em torno da haste ($^0C$).

Considerando $T(0) = 40^0C$, $T(10) = 200^0C$, $K = 0.01\ m^{-2}$ e $T_a = 20\ ^0C$, obtenha a distribuição da temperatura no interior do intervalo $(0, 10)$, considerando $nel = 10, 50, 100$. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.

## Distribuição de temperatura em uma haste circular

Encontre a distribuição de temperatura em uma haste circular com fonte interna de calor $S$, satisfazendo ao PVC:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2T}{dr^2} + b(r)\frac{dT}{dr} + S &= 0 \text{ para } r \in (0, 1) \\
\frac{dT(0)}{dr} &= 0 \\
T(1) &= 1
\end{aligned}
$$

sabendo que $b(r) = \frac{1}{r}$ para $r \in (0, 1]$ e $b(0) = 0$. Considerando $nel = 50$, $S = 1, 10,$ e $, 20\ k/m^2$, obtenha a distribuição de temperatura para os três valores de fonte interna. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.

## Resfriador unidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. 2. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor na direção unidimensional $x$ é dado pela Eq. (2). Detalhes sobre a definição do modelo matemático pode ser encontrado em (*), disponível na página do curso.

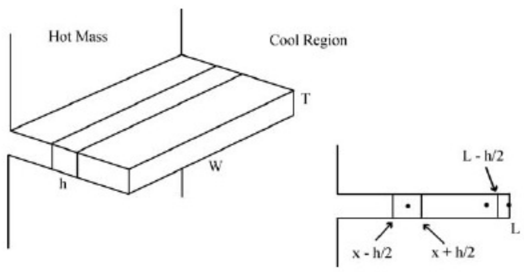


Figure 2: Geometria do Resfriador

$$
-\frac{d}{dx}\left(K\frac{du(x)}{dx}\right) + Cu(x) = f(x) \quad 0 < x < L \tag{2}
$$

com condições de contorno do tipo:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= u_0 \\
c_{ref}u(L) + K\frac{du(L)}{dx} &= c_{ref}u_{ref}
\end{aligned}
$$

*R. E. White, *Computational Modeling with Methods and Analysis*, Department of Mathematics, North Carolina State University, 2003 onde $K$ é a condutividade térmica, $u_{ref}$ é uma temperatura de referência, $u_0$ é a temperatura inicial da massa e $c_{ref}$ é a abilidade da superfície do resfriador de transmitir calor na região. A constante $C$ e o termo fonte $f$ são funções da geometria do resfriador (observe a Fig. 2), dadas por:

$$
\begin{aligned}
C &\equiv \left(\frac{2W + 2T}{TW}\right) c_{ref} \\
f &\equiv C u_{ref}
\end{aligned}
$$

onde a temperatura inicial da massa $u_0 = 160$, a temperatura de referência $u_{ref} = 70$, $K = 0.001$, $T = 0.1$, $W = 10$ e $L = 1$. Podemos considerar diferentes possibilidades para o coeficiente $c_{ref}$, por exemplo, $c_{ref} = 0.0001$, $c_{ref} = 0.001$, $c_{ref} = 0.01$, $c_{ref} = 0.1$.

Considerando $nel = 10$, $n = 50$ e $n = 100$ encontre a solução aproximada para os diferentes coeficientes $c_{ref}$. Para cada caso plote o gráfico da solução aproximada.

# Relatório

Organize um relatório incluindo:

- **Introdução:** onde deve ser apresentado a estrutura do relatório e os objetivos
- **Implementação:** onde serão apresentados a estutura do código e partes significativas do código comentado.
- **Experimentos Numéricos:** onde serão apresentados os exemplos testes utilizados, as entradas para os programas bem como tabelas e gráficos, quando for necessário.
- **Conclusão:** onde serão discutidos os resultados obtidos.

# Instruções para entrega

Os códigos fonte e o Relatório devem ser enviados por e-mail para luciac@inf.ufes.br até o dia 14/10/15. O assunto do e-mail deve ser MEF162:TRAB1:<nome> e conter, em anexo, um arquivo do tipo TRAB1<nome>.zip. Neste caso <nome> deve conter o nome e último sobrenome (por exemplo, MEF162:TRAB1:LuciaCatabriga).