Universidade Federal do Espírito Santo
$6^{\underline{o}}$ Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos I - 2019/2

Problema de Valor no Contorno - 2D

Data de entrega: 03 de dezembro de 2019

Introdução

A equação da advecção-difusão-reação, também conhecida como equação de transporte, é de fundamental importância nos problemas relacionados a aerodinâmica, meteorologia, oceanografia, hidrologia, engenharia química e de reservatórios. Considere a equação de transporte bidimensional estacionária:

$$-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\beta_x(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_y(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma(x,y)u=f(x,y) \quad \text{em } \Omega \qquad (1)$$

$$u=g \quad \text{em } \Gamma_g$$

$$-\kappa\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}=c(u-h) \quad \text{em } \Gamma_h$$

sendo u a grandeza física a ser avaliada, κ o coeficiente de difusão, $\beta_x(x,y)$ e $\beta_y(x,y)$ as velocidades nas direções x e y respectivamente, $\gamma(x,y)$ o coeficiente de reação, $f(x,y)$, o termo de fonte ou sumidouro, g, h e c funções e constante reais conhecidas.

O domínio de todos os experimentos serão definidos por: $\Omega=\{(x,y)$ tal que $a\leq x\leq b$ e $c\leq y\leq d\}$. O domínio discretizado constitui o conjunto de pontos (x_i,y_j) tais que:

$$x_i=a+(i-1)h_x, \quad i=1,\ldots,n; \quad h_x=\frac{b-a}{n-1}$$
$$y_j=a+(j-1)h_y, \quad j=1,\ldots m; \quad h_y=\frac{d-c}{m-1}$$

n e m representam, respectivamente, o número de incógnitas na direção x e na direção y, totalizando $N=n*m$ incognitas.

Objetivos do Exercício

O custo computacional dos métodos iterativos está relacionado com a rapidez de convergência dos métodos e com o número de operações de ponto flutuante necessário para calcular cada iteração. A forma de armazenar a matriz dos coeficientes é fundamental para obter custo computacional reduzido. A matriz resultante do problema de valor no contorno discretizado por diferenças finitas é pentadiagonal. Este exercício tem por objetivo observar o comportamento de métodos iterativos estacionários considerando estratégias otimizadoras.

Descrição

Use a função `pvc2d.m` e escreva uma função para resolver o sistema linear resultante pelo método SOR que deve ser implementado livre de matriz. Assim a expressão geral do métodos SOR:

$$u_I^{k+1} = \frac{w}{a_I}\left(f_I - d_I * u_{I-n}^{k+1} - b_I * u_{I-1}^{k+1} - c_I * u_{I+1}^{k} - e_I * u_{I+n}^{k}\right) + (1-w) * u_I^k$$

deve ser implementada em função dos coeficientes d_I, b_I, a_I, c_I, e_I

A função SOR devem receber como dados de entrada:

- Vetores a, b, c, d, e que guardam os coeficientes da matriz pentadiagonal.
- Número de incógnitas em cada direção: n, m.
- Parâmetro w para o método SOR.
- Tolerência tol.
- Número máximo de iterações $maxit$.

Validação 1 - Problema simples com solução trivial

Determine a distribuição de calor em uma chapa de metal, com faces termicamente isoladas e com espessura desprezível, sendo que a temperatura é conhecida em todas as faces da chapa. Neste caso a Eq. (1) é dada por:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \tag{2}$$

para (x, y) no domínio $\Omega = (a, b) \times (c, d)$. Considerando condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(a, y) &= u_c \\ u(x, c) &= u_c \\ u(x, d) &= u_c \\ u(b, y) &= u_c \end{aligned}$$

espera-se que os valores no interior da placa sejam iguais a u_c em todos os pontos de discretização. Para testar seu programa varie o número de incógnitas n e m, e as dimensões da placa a, b, c e d. Este exemplo pode te ajudar a testar quase todos os detalhes da implementação. Não é necessário apresentá-lo no relatório, mas se a sua solução para esse teste não estiver correta todo o resto estará errado.

Validação 2 - Problema com solução conhecida

Determine a solução aproximada para $u(x, y)$ em $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ considerando na Eq. (1):

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ \beta_x(x, y) &= 1 \\ \beta_y(x, y) &= 20y \\ \gamma(x, y) &= 1 \\ f(x, y) \text{ tal que } u(x, y) &= 10xy(1-x)(1-y)e^{x^{4.5}} \text{ é a solução exata} \end{aligned} \tag{3}$$

e sabendo que $u(x,y) = 0$ no contorno de Ω. Para este experimento considere a seguinte expressão para o erro cometido:

$$erro = \max_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,m} |u_{i,j} - u(x_i, y_j)| \tag{4}$$

Para encontrar a função $f(x,y)$ você deve derivar a função $u(x,y)$ e montar o lado esquerdo da expressão (1). Para auxiliar considere a possibilidade de usar um *software* para o cálculo simbólico de derivadas. Este exemplo tem por objetivo testar a acuidade da solução aproximada.

- Faça o gráfico de $u(x,y)$ para uma escolha adequada de n e m.
- No relatório apresente uma tabela com o valor do erro encontrado para um conjunto de valores de n e m e o tempo de processamento para executar a função `pvc2d.m` com a solução do sistema linear pelo método direto e pelo método SOR. Escolha n e m de tal forma que N seja da ordem de $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.
- Qual a influência da escolha do parâmetro w na solução desse experimento?

Validação 3 - Problema com solução conhecida

Determine a distribuição de calor em uma chapa de metal, com faces termicamente isoladas e com espessura desprezível, satisfazendo a equação:

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \text{em} \quad R \tag{5}$$

para (x,y) no conjunto $R = \{(x,y) \mid -1 < x < 1 \; e \; -1 < y < 1\}$ com as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
u(-1,y) &= 1 - y^2 \quad -1 < y \le 1 \\
\frac{\partial u(x,-1)}{\partial \mathbf{n}} &= -2y \quad -1 \le x \le 1 \\
\frac{\partial u(1,y)}{\partial \mathbf{n}} &= 2x \quad -1 \le y \le 1 \\
u(x,1) &= x^2 - 1 \quad -1 \le x < 1
\end{aligned}$$

- Faça o gráfico de $u(x,y)$ para uma escolha adequada de n e m.
- No relatório apresente uma tabela com o valor do erro encontrado para um conjunto de valores de n e m e o tempo de processamento para executar a função `pvc2d.m` com a solução do sistema linear pelo método direto e pelo método SOR. Escolha n e m de tal forma que N seja da ordem de $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.
- Qual a influência da escolha do parâmetro w na solução desse experimento?

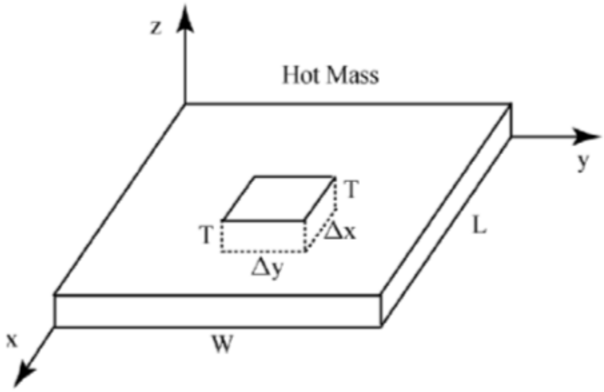

Figure 1: Geometria do Resfriador 2d.

Aplicação Física 1 - Resfriador bidimensional

Considere o problema de resfriar uma massa aquecida como mostra a Fig. 1. Exemplos podem incluir o resfriamento de chips de computadores ou amplificadores elétricos. O modelo matemático que descreve a transferência de calor nas direções x e y é dado pela Eq. (6). Detalhes sobre a definição do modelo matemático podem ser encontrados em (White, 2004)[1].

$$-k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{2c}{T}u=\frac{2c}{T}u_{ref} \quad \text{em} \quad \Omega=(0,L)\times(0,W) \tag{6}$$

onde k é a condutividade térmica (considerada aqui constante), c é o coeficiente de transferência de calor, T é a altura do resfriador, u_{ref} é a temperatura de referência. Encontre a temperatura no interior do resfriador considerando as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 70 \\ u(x,W) &= 70 \\ u(0,y) &= 200 \\ -k\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(L,y) &= c(u(L,y)-u_{ref}) \end{aligned} \tag{7}$$

e os seguintes parâmetros físicos adimensionalisados: $T=2$, $L=W=1$, $k=1$, $u_{ref}=70$. Considere o coeficiente de transferência de calor $c=1$.

- Faça o gráfico de $u(x,y)$ para uma escolha adequada de n e m.
- No relatório apresente uma tabela para um conjunto de valores de n e m, contendo o tempo de processamento para executar a função `pvc2d.m` com a solução do sistema linear pelo método direto e pelo método SOR. Escolha n e m de tal forma que N seja da ordem de $10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

[1] R. E. White, COMPUTATIONAL MATHEMATICS - Models, Methods, and Analysis with MATLAB and MPI with Methods and Analysis, CHAPMAN & HALL/CRC, 2004.

Aplicação Física 2 - Escoamento em Águas Subterrâneas

O escoamento de um fluido em um meio poroso sob certas condições pode ser modelado por equações diferenciais similares aquelas que regem a transferência de calor em estado estacionário (Equação de Poisson). O escoamento em meio poroso é regido por uma lei empírica denominada *Lei de Darcy* que é similar a *Lei de Transferência de calor de Furrier* levando os escoamentos a possuírem equações equivalentes.

A compressibilidade de um fluido indica a quantidade de massa que passa por um volume infinitesimal em uma unidade de tempo. Matematicamente a compressibilidade é regida pelo divergente da velocidade:

$$\nabla.\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{8}$$

onde $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ é a velocidade do escoamento em um domínio bidimensional. Se o fluido for incompressível $\nabla.\mathbf{v} = 0$. Por outro lado, a *Lei de Darcy* estabelece que:

$$\mathbf{v} = -k\nabla p \tag{9}$$

onde p e k são, respectivamente, pressão e condutividade hidráulicas. Em geral k depende de p, porém se o meio poroso for saturado, a condutividade pode ser considerada constante. Acoplando a *Lei de Darcy* com a Eq. (8) tem-se:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = f \tag{10}$$

Considere um meio poroso superficial saturado retangular no plano xy com pelo menos um poço. Nas faces superior e inferior do retângulo assuma que não exista fluxo na direção do contorno. Porém, considere um amplo abastecimento das fronteiras esquerda e direita de tal forma que a pressão seja conhecida. Detalhes sobre a definição do modelo matemático podem ser encontrados em (White, 2004).

O modelo de um escoamento em águas subterrâneas considerando as condições descritas acima pode ser modelado por:

$$-k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \begin{array}{l} 0 \text{ quando } (x, y) \text{ não for poço} \\ R_w \text{ quando } (x, y) \text{ for poço} \end{array} \quad \text{em } \Omega. \tag{11}$$

A Fig. 2 apresenta um esquema com 4 poços. As condições de contorno podem ser sumarizadas em:

$$\begin{array}{rcl} -k\dfrac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = & 0 & \text{para } y = c \text{ e } y = d \\ p = & p_{ref} & \text{para } x = a \text{ e } x = b \end{array} \tag{12}$$

Encontre a pressão $p(x, y)$ e a velocidade $\mathbf{v}(x, y) = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ (Eq. (9)), considerando ∇p aproximado por diferenças finitas de primeira ordem, sendo: $\Omega = (0, 5000) \times (0, 1000)$, dois poços localidados em $u_1 = (x_1, y_1)_w = (1500, 600)$ e $u_2 = (x_2, y_2)_w = (3200, 250)$, sendo $R_w = -250$, $k = 1$ e $P_{ref} = 100$. Escolha os números de incógnitas (n e m) tal que os poços u_1 e u_2 sejam pontos incógnitas.

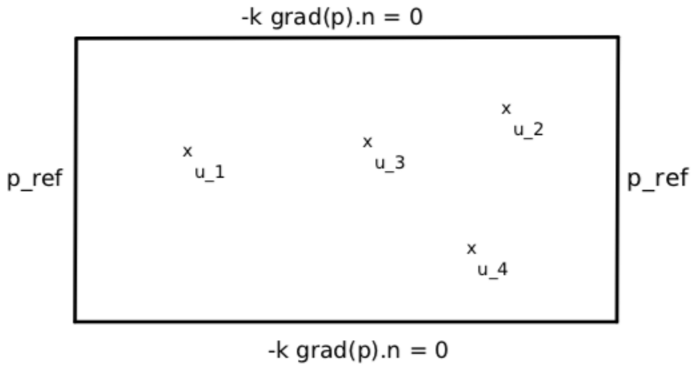

Figure 2: Esquema do Escoamento em Águas Subterrâneas - Exemplo com 4 poços.

Experimentos Específicos

- Apresente o gráfico da pressão e o campo de velcidade (Dica: faça uma pesquisa como traçar gráficos de vetores no Octave).
- Defina um número de incógnitas em cada direção ($n \times m$) de forma que você obtenha dois tamanhos de problemas: *pequeno* e *grande*.
- No relatório apresente uma tabela com osdois tamanhos de problemas: *pequeno* e *grande*, contendo o tempo de processamento para executar a função `pvc2d.m` com a solução do sistema linear pelo método direto e pelo método SOR.

1 Estrutura do Relatório

O relatório deve ser escrito observando as normas do padrão ABNT. A divisão do relatório deve ser de acordo com as seguintes seções:

- **Introdução:** apresentar a estrutura do trabalho e os objetivos.
- **Método das Diferenças Finitas:** um pequeno resumo descrevendo todas as técnicas e ordens de aproximação consideradas.
- **Implementação:** onde serão apresentados a estrutura e partes significativas do código comentado.
- **Experimentos Numéricos:** onde serão apresentados os exemplos testes utilizados, tanto as entradas para os experimentos bem como tabelas e gráficos das respectivas saídas geradas pelas soluções.
- **Conclusão:** onde serão discutidos os resultados obtidos.

Os códigos fonte e o relatório devem ser enviados por e-mail para luciac@inf.ufes.br até o dia 03/12/2019. O assunto do e-mail deve ser AN192:EXE6:<nome> em anexo, um arquivo do tipo AN192:EXE6:<nome>.zip.