Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Informática
$1^{\underline{o}}$ Exercício Computacional de Algoritmos Numéricos I - 19/12
Sistemas Lineares - Métodos Diretos usando o Octave

Objetivos

- Observar o comportamento dos métodos diretos quanto as características da matriz dos coeficientes.

Conceitos/comandos importantes:

- Uma matriz é dita mal-condicionada se:

$$cond(A) = \|A\|_* \|A^{-1}\|_* \quad \text{for um valor expressivamente elevado}$$

  Comandos do octave:

  - `cond(A)`
  - `norm(x, *)` (obtem a norma $*$ do vetor x - por exemplo, pode ser a norma euclidiana $* = 2$ ou a norma do máximo $* =$ `inf`)

- Os métodos diretos são exatos a menos de erros de ponto flutuante cometidos no processo de transformar o sistema original em um sistema trivial. Principais comando do Octave:

  - `x = A\b` (resolve o sistema linear por Eliminação de Gauss)
  - `r = b - A * x` (calcula o resíduo da solução aproximada encontrada)
  - Métricas importantes para avaliação da solução aproximada: $||x_e - x||_*$ e $||r||_*$ (x_e solução exata)

- Os métodos diretos são bem eficientes para matrizes de pequeno porte. Entretanto, o processo de solução prevê preenchimento de posições originalmente nulas (fill-in), aumentando assim o número de operações de ponto flutuante. Principais comandos do Octave:

  - `[L, U, P] = lu(A)` (obtem os fatores L, U e P)
  - `spy(A)` (obtem a esparsidade da matriz A)

- A coleção de matrizes esparsas *SuiteSparse Matrix Collection*[1] disponibiliza uma varideade de matrizes esparsas oriundas das mais deversas áreas do conhecimento. Um dos formatos disponíveis para as matrizes é <nome>.mat. Arquivo binário que armazena as informações para gerar uma matriz esparsa no formato *Compressed Column Sparse*(CCR). Os principais comandos do Octave relativos a obtenção da matriz esparsa `A` são:

  - `load <nome>.mat` (carrega dados da matriz em uma estrutura auxiliar `A`
  - `AA = Problem.A` (Armazena os dados da estrutura `A` na matriz esparsa `AA` no formato CCR)
  - `nnz(A)` (obtem o número de coeficientes não nulo da matriz `A`)

O objetivo dos execícios a seguir é observar o comportamento de matrizes esparsas na solução de sistemas lineares via métodos diretos. Faça download de matrizes esparsas de ordem $n = 10^1; 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ na *SuiteSparse Matrix Collection* que sejam quadradas e inversíveis. Para cada uma das matrizes:

1. Recupere as matrizes esparsas a partir do arquivo `.mat`

[1] https://sparse.tamu.edu/

2. Obtenha os fatores L, U e P utilizando a função `[L,U,P]=lu(A)`;

3. Observe a variação

4. Observe a configuração de esparsidade das matrizes A, L e U.

5. Calcule a taxa de preenchimento: $\texttt{100} - \left(\frac{\texttt{nnz(A)}}{\texttt{nnz(L)+nnz(U)}}\right) * \texttt{100}$.

6. Calcule a solução do sistema linear onde $\texttt{b} = \texttt{A} * \texttt{ones}(\texttt{n}, \texttt{1})$, através de $\bar{\texttt{x}} = \texttt{A}\backslash\texttt{b}$.

7. Calcule a distância relativa entre a solução exata e a solução aproximada $\frac{||\delta\texttt{x}||_\infty}{||\bar{\texttt{x}}||_\infty}$

8. Calcule a distância relativa entre a matriz original e a matriz resultante da decomposição LU: $\frac{||\delta\texttt{A}||_\infty}{||\texttt{A}||_\infty}$; $\delta A = A - P * L * U$.

9. Calcule a distância relativa entre o vetor dos termos independentes original e o vetor resultante da decomposição LU: $\frac{||\delta\texttt{b}||_\infty}{||\bar{\texttt{b}}||_\infty}$

10. Calcule a norma do resíduo: através de $||\texttt{r}||_\infty = \texttt{norm}(\texttt{b} - \texttt{A} * \texttt{x}, \texttt{inf})$.

11. Calcule o número de condicionamento da matriz: $\texttt{K} = \texttt{cond}(\texttt{A})$.

Monte uma tabela contendo as informações observadas e calculadas de cada matriz. Faça um estudo sobre o comportamento de cada matriz com relação ao preenchimento no processo de decomposição e seu condicionamento.

Relatório

Escreva um relatório suscinto com suas conclusões sobre os objetivos listados acima. Entregar uma cópia em pdf via email (luciac@inf.ufes.br)até 05/09/2019. O título do email deve ser AN192-EXE1-<nome-ultimosobrenome>.