Teoria das Filas Aplicada a Computação

Professor Berilhes Borges Garcia - http://www.inf.ufes.br/˜berilhes

UFES - Vitória, ES

1 A Fila M/M/1

O modelo de fila mais simples consiste de um único servidor em que o tempo de serviço é uma variável aleatória exponencialmente distribuída com média $\frac{1}{\mu}$, e os consumidores (trabalhos) chegam ao sistema de acordo com um processo de Poisson com razão λ.
Tal sistema é referido como um sistema de filas M/M/1 e é mostrado na figura abaixo:

Figura

A notação M/M/1 denota as características do sistema de filas. O primeiro espaço caracteriza a distribuição do tempo entre chegadas para o processo de chegada, o segundo espaço caracteriza a distribuição do tempo de serviço nos servidores. Um M denota que a distribuição são sem memória. O terceiro espaço indica o número de servidores no sistema. O quarto espaço indica a política de escalonamento usada no sistema. A ausência desta informação corresponde a uma disciplina FCFS. Assim um sistema M/M/1 é o mesmo que um sistema M/M/1/FCFS.
O número de consumidores em um sistema M/M/1 é uma cadeia de Markov de tempo contínuo CMTC onde o estado do sistema corresponde ao número de consumidores no sistema. A figura abaixo mostra o diagrama de transição de estado para um sistema M/M/1:

Figura

As probabilidades limites para os estados da CMTC podem ser obtidos resolvendo-se as equaçoẽs de equilíbrio. As equações de equilíbrio estabelecem que a razão pela qual o sistema deixa o estado j é igual a razão pela qual o sistema entra no estado j.

Estado.......Equação de Equilíbrio........Equação Simplificada

0: $\pi_0 = \pi_1\lambda \Longrightarrow \pi_1 = (\frac{\lambda}{\mu})^1\pi_0$
1: $\pi_1(\lambda+\mu) = \pi_0\lambda + \pi_2\mu \Longrightarrow \pi_2 = (\frac{\lambda}{\mu})^2\pi_0$
2: $\pi_2(\lambda+\mu) = \pi_1\lambda + \pi_3\mu \Longrightarrow \pi_3 = (\frac{\lambda}{\mu})^3\pi_0$
i: $\pi_i(\lambda+\mu) = \pi_(i-1)\lambda + \pi_(i+1)\mu$

Nós adivinhamos que:

$$\pi_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i\pi_0$$

Verifique que isto está correto substituindo de volta na equação de equilíbrio para π_i:

$$(\frac{\lambda}{\mu})^i\pi_0(\lambda+\mu) = (\frac{\lambda}{\mu})^(i-1)\pi_0\lambda+(\frac{\lambda}{\mu})^(i+1)\pi_0\mu(\frac{\lambda^(i+1)}{\mu^i})+(\frac{\lambda^i}{\mu^(i-1)}) = (\frac{\lambda^i}{\mu^(i-1)})+(\frac{\lambda^(i+1)}{\mu^i})$$

Agora determine π_0 tal que a equação $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$ seja satisfeita:

$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$
$\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_0(\frac{\lambda}{\mu})^i = 1$
$\pi_0\sum\limits_{i=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{\mu})^i = 1$
$\pi_0(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}) = 1$
$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$

Portanto, substituindo de volta na equação para $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$ nós obtemos:

$$\pi_i = (\frac{\lambda}{\mu})^i(1-\frac{\lambda}{\mu})$$

Relembre que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ é a utilização do servidor. Portanto, a condição $\rho < 1$ deve ser satisfeita se o sistema está estável, no sentido que o número de consumidores no sistema não cresce indefinidamente. Para esta condição ser verdade, nós devemos ter $\lambda < \mu$.

Logo:

$\pi_0 = 1 - \rho$
$\pi_1 = \rho^i(1 - \rho)$

O número médio de consumidores no sistema pode ser determinado da seguinte forma:

$E[N_s] = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i$
$E[N_s] = \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i(1 - \rho)$
$E[N_s] = (1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^i$
$E[N_s] = \rho(1 - \rho) \sum_{i=0}^{\infty} i\rho^(i - 1)$
$E[N_s] = \rho(1 - \rho)(\frac{1}{(1-\rho}^2)$
$E[N_s] = \frac{\rho}{1-\rho}$
$E[N_s] = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

A figura abaixo representa a equaçaõ $E[N_s] = \frac{\rho}{(1-\rho)}$:

$Figura$

O tempo médio no sistema é dado pela Lei de Little:

$E[T_s] = \frac{E[N_s]}{\lambda}$

$E[T_s] = \frac{\frac{\rho}{\lambda}}{1-\rho}$

$E[T_s] = \frac{1}{\mu-\lambda}$