INF 02841 Teoria das Filas - 2004/2 11/18/04

Aula 2: Propriedades da Distribuição Exponencial

Instrutor: Berilhes Borges Garcia Escriba: Christian Zagotto

1 Ausência de Memória

Uma variável aleatória X é dita ser sem memória se

$$Pr\{X > (s+t) \mid X > t\} = Pr\{X > s\} \forall s, t \geq 0 \tag{1}$$

P. Prove que $X \sim Exp(\lambda)$ é sem memória?
R.

$$\begin{aligned} Pr\{X > s+t \mid X > t\} &= \frac{Pr\{X > s+t\}}{Pr\{X > t\}} &(2)\\ &= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} &(3)\\ &= e^{-\lambda s} = Pr\{X > s\} &(4)\\ & &(5)\end{aligned}$$

P. Dê algum exemplo da vida real cujo tempo de vida pode ser modelado por uma variável aleatória X, tal que $Pr\{X > s+t \mid X > t\}$ decresce quando t aumenta.
R. Tempo de vida de um carro. Um carro velho é menos provável de "sobreviver" por um período adicional de 6 anos. Distribuições para as quais $Pr\{X > s+t \mid X > t\}$ decresce quando t aumenta são ditas ter uma razão de falhas crescente.

P. Dê algum exemplo do mundo real cujo tempo de vida pode ser modelado por um X tal que $Pr\{X > s+t \mid X > t\}$ aumenta quando t aumenta.
R. Tempo de vida de um trabalho em uma CPU sob o sistema operacional UNIX. Quanto mais CPU um trabalho tem gasto até um instante de tempo, mais provável que ele utilize mais.
Tempo de vida de um chip.
Distribuições para as quais $Pr\{X > s+t \mid X > t\}$ aumenta quando t também aumenta são chamadas de distribuições com razão de falha decrescente.

***Exemplo* 1 :** Suponha que o tempo que um consumidor gasta em um banco é exponencialmente distribuído com média de 10 minutos.
P. Qual é a $Pr\{$consumidor gaste > 5 minutos no banco$\}$?
R. $e^{-5 \cdot \frac{1}{10}} = e^{\frac{-1}{2}}$

P. Qual é a $Pr\{$consumidor gaste > 15 minutos no banco $\mid$ ele ainda está no banco depois de 10 minutos$\}$?
R. A mesma do item anterior.

A razão porque a distribuição exponencial é tão conveniente é que a história passada não interessa!!!!

***Exemplo* 2 :** Uma agência dos correios tem dois caixas. Consumidor B está sendo atendido por um caixa, e consumidor C está sendo atendido pelo outro caixa, quando o consumidor A chega à agência. Todos os tempos de serviço são exponencialmente distribuídos.
P. Qual é a $Pr\{$A seja o último a partir$\}$?
R. $\frac{1}{2}$. Note que um dos dois B ou C partirá primeiro. Assuma que B parta primeiro. Então C e A terão a mesma distribuição sob seus tempo de serviço restante. Não interessa se C tem recebido serviço por intervalo de tempo.

Pode ser provado que a distribuição exponencial é a única distribuição contínua sem memória.

P. Existe alguma distribuição discreta sem memória?
R. Sim. A distribuição geométrica.

2 Mais propriedades da Exponencial

Teorema 1. *Dado que* $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$, $X_1 \perp X_2$.

$$Pr\{X_1 < X_2\} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{6}$$

Prova:

$$\begin{aligned}
Pr\{X_1 < X_2\} &= \int_0^\infty Pr\{X_1 < X_2 \mid X_2 = x\} \cdot f_2(x)\mathrm{d}x && (7)\\
&= \int_0^\infty Pr\{X_1 < x\}\lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}\mathrm{d}x && (8)\\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda_1 x})(\lambda_2 e^{-\lambda_2 x})\mathrm{d}x && (9)\\
&\vdots && (10)\\
&= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} && (11)\\
& && (12)
\end{aligned}$$

***Exemplo* 3 :** Considere um sistema estéreo formado por um rádio e um amplificador. O tempo de vida do amplificador é exponencialmente distribuído com média de 500, e o tempo de vida do rádio é exponencialmente distribuído com média 1000.
P. Qual é a probabilidade de que uma falha do sistema, quando esta ocorrer, tenha sido causada pelo rádio?
R. $\frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{500} + \frac{1}{1000}}$

Teorema 2. *Dado que* $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$, $X_1 \perp X_2$.
Assuma que

$$X = min(X_1, X_2)$$

Então

$$X \sim Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Prova:

$$\begin{aligned}
Pr\{X > t\} &= Pr\{min(X_1, X_2) > t\} && (13)\\
&= Pr\{X_1 > t \text{ e } X_2 > t\} && (14)\\
&= Pr\{X_1 > t\} \cdot Pr\{X_2 > t\} && (15)\\
&= e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 t} && (16)\\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} && (17)
\end{aligned}$$