Estrututura de Arquivo 2003/1
Lista de Exercício 1

1. Prove que $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$ e que $n! = o(n^n)$.

2.
   (a) É $2^{n+1} = O(2^n)$?
   (b) É $2^{2n} = O(2^n)$?

3. Mostre que a solução de $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$ é $O(n \lg n)$.

4. Utilize o metódo da iteração para resolver a seguinte recorrência:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(n-1) + n^2 \quad \text{se } n > 1$$

Encontre uma função $g(n)$ tal que $T(n) = \Theta(g(n))$. (A função $g(n)$ deveria ser expressa sem o uso de qualquer símbolo $\sum$.)

5. Resolva a seguinte recorrência utilizando o método da iteração.

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \lg^2 n \quad \text{se } n > 1$$

6. Resolva as seguinte recorrência:

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = kT(\frac{n}{4}) + n^3 \quad \text{se } n > 1$$

utilizando o método da iteração. Quando k é igual a:

   (a) 1
   (b) 4
   (c) 8

Dica: Assuma que n é múltiplo de 4.

7. Resolva as seguintes recorrências utilizando o método da iteração ($T(1) = 1$):
   (a) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3 \quad \text{se } n > 1$
   (b) $T(n) = T(\frac{7n}{10}) + n \quad \text{se } n > 1$

8. Prove os resultados do exercício anterior por meio de indução.

9. Resolva as seguintes recorrências utilizando a técnica da árvore de recursão, assuma que $T(x) = 1$ para $x \leq 2$.

(a) $T(n) = 2T(\frac{n}{3}) + n$
(b) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$
(c) $T(n) = 4T(\sqrt{n}) + \lg n$

10. Resolva a seguinte recorrência: $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$.

11. Uma das questões de uma prova elaborada pelo Prof. Justus consistia em escrever um algoritmo *encontsoma*(S_1, S_2, x), que dado dois vetores S_1 e S_2 (cada um de tamanho n) determinava um par de elementos (se algum), um de S_1 e outro de S_2, cuja soma fosse igual a um valor x, e cujo tempo de execução, no pior caso, tivesse um comportamento da ordem $O(n \lg n)$.

    Um dos alunos do Prof. Justus propôs a seguinte solução:

```
encontsoma(S1,S2,x)
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
            if S1[i]+S2[j]=x
                then
                    return(S1[i],S2[j])
```

    (a) Qual foi a correção do Prof. Justus? Explique o porque?
    (b) Proponha um algoritmo alternativo.

12. Encontre (e mostre como você encontrou) a razão de crescimento de $T(n)$ definida pela seguinte recursão:

$$
\begin{aligned}
&T(0) = 0 \\
&T(n) = 3n + T(\lfloor 0.75n \rfloor) \qquad \text{se } n > 0
\end{aligned}
$$

13. Prove a seguinte afirmação: Se $f_1(n) = O(g_1(n))$ e $f_2(n) = O(g_2(n))$ então $f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$.

14. Prove a seguinte afirmação: Se $f_1(n) = O(g_1(n))$ e $f_2(n) = O(g_2(n))$ então $f_1(n) + f_2(n) = O(\max(g_1(n), g_2(n)))$.

15. Resolva as seguintes recorrências utilizando o método mestre:

    (a) $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$
    (b) $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$
    (c) $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg n$
    (d) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + n \lg n$

16. **Inversões**

    $A[1...n]$ é um vetor de n números distintos. Se $i < j$ e $A[i] > A[j]$, então o par (i, j) é chamado de uma *inversão* de A.

(a) Liste as cinco inversões do vetor $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$.

(b) Qual é o vetor com elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ que contêm o maior número de inversões? Quantas inversões este vetor têm?

(c) Qual é o relacionamento entre o tempo de execução do algoritmo de "insertion sort" e o número de inversões no vetor de entrada? Justifique sua resposta.