

Aula 16: *Satisfabilidade*  $\leq^p$  *Clique*

Instrutor: Berilhes Borges Garcia

Escriba: Ramon Schwartz

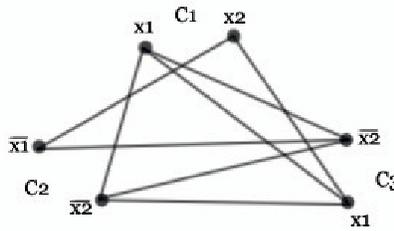
**Teorema 1.** *Satisfabilidade*  $\leq^p$  *Clique*

Dado uma fórmula booleana  $\phi$  em CNF, mostre como construir um grafo  $G$  e um inteiro  $k$  tal que  $G$  tem um clique de tamanho  $k$  se e somente se  $\phi$  é satisfatível. Considere  $k$  como sendo o número de cláusulas em  $\phi$ . Os vértices de  $G$  são todas as ocorrências de literais em  $\phi$ . Existe uma aresta em  $G$  entre duas de tais ocorrências se eles estão em cláusulas diferentes e os dois literais não são complementares.

*Example:*

$$\phi = \overbrace{(x_1 \vee x_2)}^{C_1} \wedge \overbrace{(\neg x_1 \vee \neg x_2)}^{C_2} \wedge \overbrace{(x_1 \vee \neg x_2)}^{C_3}. \quad (1)$$

Produziria o seguinte grafo:



⊠

O grafo  $G$  tem um clique de tamanho  $k$  se e somente se  $\phi$  é satisfatível. Essencialmente uma aresta entre duas ocorrências de literais representa a habilidade de atribuir a ambos os literais o valor *true* sem encorrer em um conflito local (contradição) em  $k$ -clique assim representa a habilidade de atribuir *true* a pelo menos um literal de cada cláusula sem um conflito global. Neste exemplo,  $k = 3$  e existe dois 3-cliques (triângulos) correspondendo a duas formas de satisfazer a fórmula.

Vamos provar formalmente que  $G$  tem um  $k$ -clique se e somente se  $\phi$  é satisfatível. Primeiro assumamos que  $\phi$  é satisfatível  $\tau : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{true, false\}$  é uma atribuição verdadeira satisfazendo  $\phi$ . Pelo menos um literal em cada cláusula deve ser atribuído o valor *true* sob  $\tau$ . Escolha um de tais literais de cada cláusula. Os vértices de  $G$  correspondentes a estes literais *true* estão todos conectados um ao outro porque nenhum par é complementar, assim eles formam um  $k$ -clique. Reciprocamente, suponha que  $G$  tem um  $k$ -clique. Uma vez que  $G$  é  $k$ -partido e os elementos na partição correspondem a cláusulas, o  $k$ -clique deve ter exatamente um vértice de cada cláusula. Atribua *true* correspondendo aos vértices no clique. Isto pode ser feito sem conflito, uma vez que nenhum par de literais complementares aparecem no clique. Atribua valores booleanos arbitrários as demais variáveis.