INF 02779 Análise de Algoritmos - 2004/2 2/22/05

Aula 10.2: Dividir e Conquistar - MERGESORT

Instrutor: Berilhes Borges Garcia Escriba: RAONNE BARBOSA VARGAS

Método de Ordenação MERGESORT

DIVIDIR :
Divida a sequência de n elementos em duas subsequências de $\frac{n}{2}$ elementos.

CONQUISTAR :
Ordene as duas subsequências recursivamente usando o MERGESORT.

COMBINE :
Fundir as duas subsequências ordenadas de modo a produzir a reposta para o problema original.

ALGORITMO :

$Mergesort\,(A, p, r)$
$if\,(p < r)$
  $q \longleftarrow \lfloor \frac{p+r}{2} \rfloor$
  $Mergesort\,(A, p, q)$
  $Mergesort\,(A, q + 1, r)$
  $Fundir\,(A, p, q, r)$

Função Fundir

Veremos agora uma forma genérica da função para fundir dois vetores ordenados em um único vetor ordenado.
Considerando os dois vetores ordenados A=[a1,a2,a3,...,an] e B=[b1,b2,b3,...,bm] que desejamos fundir, e que o simbolo "."denota concatenação de vetores :

Fundir (A,B)
if A é NULO
  return B
if B é NULO
  return A
$if(a1 \leq b1)$
  return [a1].Fundir([a2,...,an],B)
else
  return [b1].Fundir(A,[b2,...,bn])

Análise do MERGESORT :

O MERGESORT é considerado assitoticamente ótimo. Isso porque trata-se de um algoritmo de ordenação em tempo $\theta(nlgn)$ tanto no melhor quanto no pior caso.

Relação de Recorrência :

$T(n) = T\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right) + T\left(\lceil \frac{n}{2} \rceil\right) + \theta(n)$

Esta Relação de Recorrência é equivalente a :
$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \theta(n), para \;\; n > 1$
$T(1) = \theta(1)$

Prova do Cálculo da Ordem de Crescimento do Tempo de Execução pelo Método Iterativo :

$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n \quad (1)$
$T(\frac{n}{2}) = 2T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2} \quad (2)$

Substituindo (2) em (1):
$T(n) = 4T(\frac{n}{4}) + 2n \quad (3)$
$T(\frac{n}{4}) = 2T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4} \quad (4)$

Substituindo (4) em (3):
$T(n) = 8T(\frac{n}{8}) + 4n$

Assim:

$T(n) = 2^k T(\frac{n}{2^k}) + \sum_{i=1}^{k} n$

Para $\frac{n}{2^k} = 1$ temos k=lg(n)

Logo:
$T(n) = 2^(lg(n))T(1) + \sum_{i=1}^{lg(n)} n$
$T(n) = n + \sum_{i=1}^{lg(n)} n$
$T(n) = n + nlg(n)$

$T(n) = \theta(nlgn)$

Observações Finais

1) Como o MERGESORT possui tempo $\theta(nlgn)$ tanto no melhor quanto no pior caso, é fácil perceber que ele possuirá tempo $\theta(nlgn)$ também no Caso Médio.

2) O MERGESORT demanda mais Espaço Adicional que o Quicksort (que é "In Place"), e por isso na maioria das vezes haverá mais perda de tempo, que está incluída nas constantes omitidas na Notação Assintotica.

0