

## MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESCOAMENTO BIFÁSICO COM ACOPLAMENTO GEOMECÂNICO

**Marcos Alcoforado Mendes**

**Márcio Arab Murad**

**Luis Felipe F. Pereira**

Depto de Mecânica Computacional, CMC, LNCC,

25651-075, Petrópolis, RJ, Brasil

*marcosalcoforado@gmail.com, murad@lncc.br, felipepereira62@gmail.com*

**Andrea M.P. Valli**

**Lucia Catabriga**

Depto de Informática, UFES

29075-910, Goiabeiras, Vitória, ES, Brasil

*avalli@inf.ufes.br, luciac@inf.ufes.br*

**Resumo.** Neste trabalho apresentamos uma nova metodologia para a resolução numérica de modelos de acoplamento hidromecânico utilizando técnicas de pós-processamento de Petrov-Galerkin, em conjunção com métodos localmente conservativos para a equação hiperbólica de transporte da saturação. Além disso, propomos uma forma inovadora de computar os efeitos da evolução temporal da porosidade sobre o transporte, baseada na técnica de decomposição de operadores. Testes numéricos mostrando a acurácia dos métodos numéricos propostos são apresentados no contexto de um problema de extração secundária de petróleo 2D, utilizando um modelo de acoplamento hidromecânico simplificado.

**Keywords:** acoplamento hidromecânico, técnica de decomposição de operadores, técnicas de pós-processamento de Petrov-Galerkin, extração secundária de petróleo 2D

## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos de acoplamento hidromecânico objetivam descrever a percolação de um ou mais fluidos em meios porosos deformáveis. O movimento dos fluidos, induzido por um gradiente de pressão, provoca variações de tensões na matriz porosa que por sua vez se deforma. Consequentemente, propriedades da rocha tais como porosidade e permeabilidade são alteradas modificando o escoamento. Essa interação entre hidrodinâmica e análise de tensões e deformações na matriz porosa consiste no protótipo do acoplamento hidromecânico, que necessita ser modelado com acurácia computacional a fim de obtermos respostas confiáveis das simulações numéricas.

Discretizações para modelos de acoplamento hidromecânico vem sendo propostos por vários autores, dentre os quais destacamos o trabalho de David and Settari (2002). Neste contexto apresentamos uma nova metodologia para a discretização dessa classe de problemas. Objetivando a conservação local da massa, desenvolvemos métodos numéricos para a computação da velocidade de Darcy baseados em técnicas de pós-processamento de Petrov-Galerkin, em conjunção com métodos localmente conservativos para a equação hiperbólica de transporte da saturação Abreu (2007); Ribeiro (2007). Além disso, propomos uma forma inovadora de computar os efeitos da evolução temporal da porosidade sobre o transporte, baseada na técnica de decomposição de operadores (Abreu (2007)). Testes numéricos mostrando a acurácia dos métodos numéricos propostos são apresentados neste trabalho no contexto de um problema de extração secundária de petróleo 2D utilizando um modelo de acoplamento hidromecânico simplificado.

## 2. EQUAÇÕES GOVERNANTES

As principais hipóteses simplificadores do modelo são: ausência de efeitos gravitacionais, validade da lei de Darcy para escoamentos multifásicos através da introdução do conceito de permeabilidade relativa, ausência de troca de massa entre as fases, incompressibilidade das fases fluidas e da fase sólida na escala do poro, matriz porosa elástica linear isotrópica, pressão capilar nula, convecção do campo de porosidade induzido pelo movimento do sólido e efeitos inerciais da conservação de momento do sistema desprezíveis. Tendo em vista essas considerações, seja um domínio  $\Omega \subset R^3$  com fronteira  $\Gamma = \Gamma_N^u \cup \Gamma_D^u \cup \Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p$  ocupado por um reservatório submetido a um carregamento  $H(\mathbf{x})$  sobre  $\Gamma_N^u$  com deslocamento nulo sobre  $\Gamma_D^u$ . Considerando matriz porosa saturada por dois fluidos imiscíveis, vazão de fluido  $Q(\mathbf{x})$  prescrita sobre  $\Gamma_N^p$ , saturação prescrita sobre a fronteira de injeção de fluido  $\Gamma_D^{S_w} \subset \Gamma_N^p$  e pressão do poro nula sobre  $\Gamma_D^p$ , o problema de valor inicial e de contorno é dado a seguir.

**Formulação 1** *Conhecidas as funções de mobilidade  $\lambda_w(S_w)$ ,  $\lambda_o(S_w)$ ,  $\lambda_t(S_w)$ , o coeficiente de permeabilidade  $K(\phi)$  e as constantes elásticas de Lamé  $\lambda$ ,  $\mu$ , achar as soluções da pressão total  $p(\mathbf{x}, t)$ , do deslocamento do sólido  $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ , da saturação da água  $S_w(\mathbf{x}, t)$  e da porosidade  $\phi(\mathbf{x}, t)$  com  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  satisfazendo a equação de conservação de momento*

$$(\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}_s + \mu \Delta \mathbf{u}_s - \nabla p = 0, \quad (1)$$

a equação de conservação de massa total

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + \mathbf{V}_{Dt} \right) = 0, \quad (2)$$

com  $\mathbf{V}_{Dt}$  dado por

$$\mathbf{V}_{Dt} = -\lambda_t(S_w)K(\phi)\nabla p, \quad (3)$$

a conservação de massa do sólido

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div} \left( (1 - \phi) \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right), \quad (4)$$

a conservação de massa da água

$$\frac{\partial (S_w \phi)}{\partial t} + \text{div} \left( S_w \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \text{div} (\lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \quad (5)$$

com condições iniciais

$$\text{div} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (6)$$

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi^0(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$S_w(\mathbf{x}, 0) = S_w^0(\mathbf{x}) \quad (8)$$

e condições de contorno

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^u, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = H(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^u, \quad (10)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ sobre } \Gamma_D^p, \quad (11)$$

$$-\lambda_t(S_w) K \nabla p \cdot \mathbf{n} = Q(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_N^p, \quad (12)$$

$$S_w(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \text{ sobre } \Gamma_D^{S_w}, \quad (13)$$

onde  $\Gamma_D^u \cap \Gamma_N^u = \emptyset$ ,  $\Gamma_D^u \cup \Gamma_N^u = \Gamma$ ,  $\Gamma_D^p \cap \Gamma_N^p = \emptyset$ ,  $\Gamma_D^p \cup \Gamma_N^p = \Gamma$ .

Na Formulação 1, a Eq. (1) representa o equilíbrio de tensões das fases fluidas e sólida. A Eq. (2) corresponde à lei de conservação de massa total, onde  $\mathbf{V}_{Dt}$  corresponde à velocidade de percolação total da mistura fluida a qual é relacionada com a poro pressão por meio da lei de Darcy descrita na Eq. (3). A fronteira onde prescrevemos a saturação coincide com região de entrada de fluxo podendo ser definida como  $\Gamma_D^{S_w} = \{\mathbf{x} \in \Gamma : Q(\mathbf{x}) < 0\}$ . É importante notar a ausência de condição inicial para a pressão do poro, já que a mesma é determinada pela condição inicial de incompressibilidade ( $\text{div} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, 0) = 0$ ) e pelas condições de fronteira para a pressão, deslocamento e tensão total. As condições de contorno para a porosidade também não serão prescritas, pois, conforme será visto na Seção 3.3, desprezaremos os efeitos convectivos da fase sólida sobre a Eq. (4).

### 3. Discretização do modelo de acoplamento hidromecânico

Para resolvermos numericamente a formulação apresentada na Seção 1, utilizamos uma abordagem sequencial em que o sistema de equações é decomposto em subsistemas que são discretizados utilizando métodos numéricos específicos para cada subproblema David and Settari (2002). A seguir apresentamos cada um dos subsistemas como problemas independentes entre si descrevendo os métodos numéricos empregados para resolvê-los. Posteriormente explicamos o algoritmo de acoplamento entre eles, objetivando a evolução das variáveis primárias do modelo de forma consistente no tempo.

#### 3.1 Subproblema da poromecânica

O sistema de equações da poromecânica possui caráter parabólico, sendo composto pelas Eqs. (1)-(3) do modelo original e pelas condições de contorno (9)-(12) e condição inicial (6).

As variáveis primárias do subsistema são a pressão total  $p$  e o deslocamento do sólido  $\mathbf{u}_s$ , supondo  $S_w(\mathbf{x}, t)$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t)$  conhecidos. No caso particular onde o campo de permeabilidade  $K$  independe da porosidade e a função de mobilidade é constante, i.e  $\lambda_t(S_w) = 1$ , a formulação da poromecânica se reduz à do modelo poroelástico proposto por Biot Murad et al. (1996) para escoamento monofásico. Este modelo foi discretizado e analisado numericamente por Murad et al. (1996) no contexto de análise numérica de equações parabólicas. Seguindo o procedimento usual, discretizamos o subsistema da poromecânica fazendo uso do método de Galerkin com funções interpolantes lineares na discretização espacial aliado ao esquema de diferenças finitas de Euler implícito no tempo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t_s} (\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t_n)), \quad (14)$$

onde  $\Delta t_s = t_{n+1} - t_n$  é o passo de tempo do módulo da poromecânica.

### 3.2 Pós-processamento para a velocidade de Darcy

Após o cômputo dos campos  $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\}$  no instante  $t_{n+1}$  pelo método dos elementos finitos, podemos obter uma aproximação  $\mathbf{v}_h^{n+1}$  para a velocidade de percolação da mistura fluida por meio da expressão:

$$\mathbf{v}_h^{n+1} \approx -\lambda_t(S_{wh})K(\phi_h)\nabla p_h^{n+1}. \quad (15)$$

Como o campo  $\mathbf{v}_h^{n+1}$  é obtido a partir do gradiente de  $p_h^{n+1}$ , ele é aproximado com menor precisão em relação ao potencial. De fato, a aplicação do método de Galerkin em conjunção com a Eq. (15) para problemas com permeabilidade heterogênea gera campos de velocidades não conservativos (Mose et al., 1994), fazendo com que a lei de conservação de massa total, Eq. (2), não seja obedecida no nível de cada elemento. Isso nos motiva o desenvolvimento de métodos mais precisos para a computação da velocidade de Darcy.

Uma possível solução para este problema seria adotar uma formulação mista para o subsistema da poromecânica, onde os campos potenciais  $(\mathbf{u}_s, p)$  e os fluxos e tensões  $(\mathbf{V}_{Dt}, \boldsymbol{\sigma}_{ef})$  são aproximados simultaneamente utilizando os espaços de Raviart-Thomas (RT). Tal técnica gera campos de velocidade conservativos com taxas ótimas de convergência e tem sido utilizada com sucesso em problemas de escoamento bifásico em meios porosos rígidos heterogêneos (Douglas et al., 1997).

Nos espaços RT as interpolações para os campos de velocidade são escolhidas de forma que os graus de liberdade representem o fluxo normal sobre cada uma das arestas dos elementos da malha. Tais interpolações são adequadas para aproximar campos de velocidade em meios heterogêneos, pois impõem apenas a continuidade da componente normal do campo de velocidades nas arestas dos elementos, permitindo que a componente tangencial seja descontínua (Mose et al., 1994). No entanto, em meios deformáveis as interpolações dos espaços RT para os campos de tensão e deformação violam a simetria do tensor de tensões sendo necessário o enfraquecimento da imposição de simetria por meio da introdução de multiplicadores de Lagrange Arnold et al. (2007). Tal fato aliado ao custo computacional envolvido em aproximar os quatro campos  $(\mathbf{u}_s, p, \boldsymbol{\sigma}_{ef}, \mathbf{V}_{Dt})$  simultaneamente tornam essa abordagem pouco competitiva.

Neste trabalho, propomos utilizar a técnica de pós-processamento global sugerida por Loula et al. (1995), cuja idéia principal é projetar o campo de velocidade de percolação total obtido em (15) no espaço das funções de Raviart-Thomas de mais baixa ordem (RT<sup>0</sup>). Essa projeção é feita resolvendo o seguinte problema variacional de Petrov-Galerkin:

**Formulação 2** Conhecidos os campos  $S_{wh}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\phi_h(\mathbf{x}, t)$  constantes em nível de cada elemento, as funções reais  $K(\phi)$ ,  $\lambda_t(S_w)$ ,  $\lambda_w(S_w)$ , o parâmetro de estabilização  $\delta > 0$  e o par  $\{\mathbf{u}_h^{n+1}, p_h^{n+1}\}$  solução pelo método de elementos finitos do subsistema da poromecânica, achar  $\mathbf{v}_h^{n+1} \in RT^0$  tal que

$$(\mathbf{v}_h^{n+1} + \lambda_t(S_{wh})K(\phi_h)\nabla p_h^{n+1}, \boldsymbol{\tau}_h) + \delta \left( \text{div} \mathbf{v}_h^{n+1} + \text{div} \frac{\partial \mathbf{u}_h^{n+1}}{\partial t}, \text{div} \boldsymbol{\tau}_h \right) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in RT^0, \quad (16)$$

onde a derivada parcial no tempo é aproximada utilizando o esquema (14).

O primeiro termo da equação variacional (16) garante a igualdade  $\mathbf{v}_h^{n+1} = -\lambda_t(S_w)K(\phi)\nabla p_h^{n+1}$  de forma fraca, enquanto que o segundo termo impõe uma melhor aproximação para a equação de conservação de massa total, Eq. (2). O campo  $\mathbf{v}_h^{n+1}$  obtido ao resolvermos a Formulação (2) herda as boas propriedades dos espaços  $RT^0$ , com cada uma de suas componentes dadas por polinômios lineares e continuidade assegurada apenas na componente normal às arestas dos elementos. Tais propriedades são de extrema importância na transferência do campo de velocidade para o módulo de transporte, a fim de preservar as propriedades de conservação local desejadas na aproximação da saturação.

### 3.3 Subsistema da porosidade

O subsistema da porosidade é composto somente pela equação de conservação de massa da fase sólida, Eq. (4). Ao desprezarmos a convecção induzida pelo movimento da fase sólida, tal equação se reduz à expressão:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = (1 - \phi) \text{div} \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \quad (17)$$

a qual pode ser integrada diretamente, obtendo a solução:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = 1 - (1 - \phi^0(\mathbf{x})) \exp(-\text{div} \mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)). \quad (18)$$

### 3.4 Subsistema do transporte

O subsistema do transporte tem como incógnita a saturação da água  $S_w$ , sendo formado apenas pela equação de transporte (5) reescrita abaixo por:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \text{div} \left( S_w \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \text{div} (\lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{Dt}) = -S_w \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (19)$$

tendo como condições iniciais e de contorno as Eqs. (8) e (13), respectivamente, supondo conhecidos os campos  $\phi(x, t)$ ,  $\partial \mathbf{u}_s / \partial t$  e  $\mathbf{V}_{Dt}$ .

Podemos notar que a ausência de pressão capilar faz com que a equação de transporte (19) seja de natureza hiperbólica. Além disso, a deformação da matriz porosa acrescenta um termo de fluxo devido à convecção da fase sólida e faz com que a porosidade varie com o tempo resultando no termo de reação do lado direito da Eq. (19). Para resolvermos essa equação propomos aplicar a técnica de decomposição de operadores baseado num esquema de previsão e correção, a fim de contabilizarmos separadamente o transporte convectivo da saturação e o termo de reação provocado pelo efeito transiente da porosidade. Este procedimento é feito definindo a seguinte sequência de problemas para cada subintervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ :

**Formulação 3** Conhecidos a condição inicial  $S_w^0(\mathbf{x})$  e os campos  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}_s(\mathbf{x}, t) = \partial \mathbf{u}_s / \partial t$ ,  $\mathbf{V}_{Dt}(\mathbf{x}, t) \forall t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , resolva para cada subintervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  com  $t_0 = 0, t_N = T$  os seguintes problemas:

1. **Preditor:** Achar  $S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1})$ , tal que

$$\phi \frac{\partial S_w^*}{\partial t} + \text{div} \left( S_w^* \phi \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \right) + \text{div} (\lambda_w(S_w^*) \mathbf{V}_{Dt}) = 0, \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (20)$$

sujeito à condição inicial

$$S_w^*(\mathbf{x}, t_n) = S_w^n(\mathbf{x}),$$

e condição de contorno

$$S_w^*(\mathbf{x}, t) = s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma_D^{S_w}.$$

2. **Corretor:** Achar  $S_w(\mathbf{x}, t_{n+1})$  tal que

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -S_w \frac{\partial \phi}{\partial t}, \forall t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (21)$$

sujeito à condição inicial

$$S_w(\mathbf{x}, t_n) = S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1}).$$

Com a técnica de decomposição de operadores proposta, resolvemos dois problemas para cada intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ . Na resolução do primeiro problema, Eq. (20), obtemos a predição  $S_w^*(\mathbf{x}, t_{n+1})$  da saturação para o instante  $t_{n+1}$ , onde negligenciamos o termo de fonte reativo oriundo da variação temporal da porosidade. Em seguida, utilizamos a solução preditora como condição inicial para o problema corretor, que evolui novamente a saturação ao longo do intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$  computando apenas o termo da variação da porosidade.

O problema corretor pode ser resolvido analiticamente. Reescrevendo a Eq. (21) na forma

$$\frac{\partial \ln(S_w)}{\partial t} = -\frac{\partial \ln(\phi)}{\partial t}, \quad (22)$$

e integrando no intervalo  $[t_n, t_{n+1}]$ , obtemos

$$S_w^{n+1} = \phi^n \frac{S_w^n}{\phi^{n+1}}. \quad (23)$$

É importante ressaltar que o passo de correção objetiva preservar a fração de volume de água  $\theta = \phi S_w$  quando a porosidade varia temporalmente, garantindo dessa forma a conservação de massa local.

Para a discretização da Eq. (20) adotamos o método de volumes finitos de segunda ordem Nessyahu-Tadmor (NT), utilizado com sucesso em escoamentos bifásicos em meios porosos rígidos Abreu (2007). Este método pode ser visto como uma extensão do método de Lax-Friedrichs com ordem quadrática de convergência, obtida aproximando as derivadas da solução por meio de funções limitadoras de inclinação. É um método robusto, explícito no tempo, entrópico, computacionalmente eficiente e estável desde que a seguinte condição de CFL seja obedecida em nível de cada elemento  $\Omega_{ij}$  da malha:

$$\text{CFL} = \frac{\Delta t_t}{H} \text{Max} \left( \frac{\|\mathbf{F}'(S_w)\|}{\phi_{ij}} \right) \leq 0.5 \quad \forall \Omega_{ij} \subset \Omega, \quad (24)$$

onde  $H$  e  $\Delta t_t$  correspondem aos passos de discretização espacial e temporal e  $\mathbf{F}(S_w)$  é o termo de fluxo da Eq. (20), dado pela expressão:

$$\mathbf{F}(S_w) = S_w \phi \mathbf{v}_s + \lambda_w(S_w) \mathbf{V}_{Dt}. \quad (25)$$

### 3.5 Algoritmo de sincronismo

Para cada um dos subsistemas apresentados necessitamos resolver um conjunto das incógnitas do problema original, supondo conhecidas as demais. Para que as variáveis do modelo possam evoluir no tempo de forma consistente, necessitamos construir um algoritmo de sequenciamento ou “staggered” entre os subsistemas discretizados, de forma que possam comutar suas soluções numéricas. Exceto para o primeiro passo de tempo, o sincronismo entre os módulos apresentados anteriormente é dado pelo seguinte algoritmo:

#### Algoritmo 1

Para  $n = 1 \dots N - 1$ :

1. Resolva o problema preditor do módulo de transporte e obtenha  $S_w^*(x, t_{n+1})$ , a partir de  $S_w(x, t_n)$ ,  $\phi(x, t_n)$ ,  $\mathbf{V}_{Dt}(x, t_n)$  e  $\mathbf{v}_s(x, t_n)$ .
2. Resolva o módulo da poromecânica e obtenha  $\mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$  e  $p(x, t_{n+1})$ , conhecidos  $\mathbf{u}_s(x, t_n)$ ,  $S_w^*(x, t_{n+1})$  e o valor da porosidade, extrapolado para o tempo  $t_{n+1}$  e definido como  $\phi^E(x, t_{n+1}) \equiv 2\phi(x, t_n) - \phi(x, t_{n-1})$ .
3. Resolva o módulo do pós-processamento para a velocidade de Darcy e obtenha  $\mathbf{V}_{Dt}(x, t_{n+1})$ , a partir de  $\mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$ ,  $\mathbf{u}_s(x, t_n)$  e  $p(x, t_{n+1})$ .
4. Resolva o módulo de porosidade e obtenha  $\phi(x, t_{n+1})$ , conhecido  $\text{div } \mathbf{u}_s(x, t_{n+1})$ .
5. Resolva o problema corretor do módulo de transporte e obtenha  $S_w(x, t_{n+1})$ , conhecidos  $S_w^*(x, t_{n+1})$  e  $\phi(x, t_{n+1})$ .

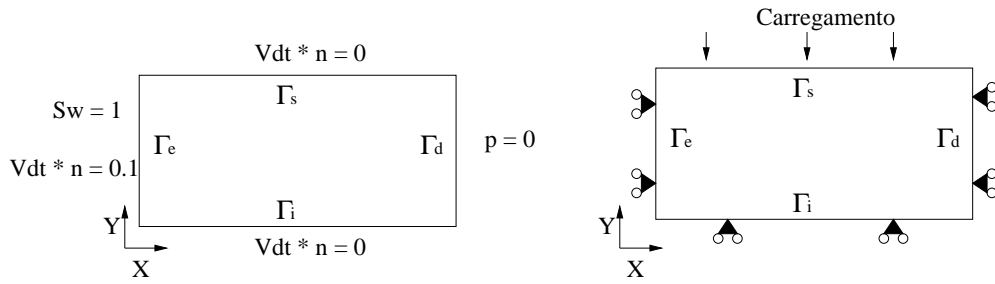
O módulo da saturação avança primeiramente no tempo. A razão para isso é meramente técnica e baseia-se no fato do método numérico para o transporte ser explícito no tempo, enquanto que o da poromecânica é implícito. A poromecânica avança primeiro no tempo apenas no primeiro passo de tempo, onde não conhecemos os campos de velocidades necessários para o módulo do transporte, já que a condição inicial da poromecânica é dada somente pela restrição de incompressibilidade  $\text{div } \mathbf{u}_s(x, 0) = 0$ .

## 4. Simulações Computacionais

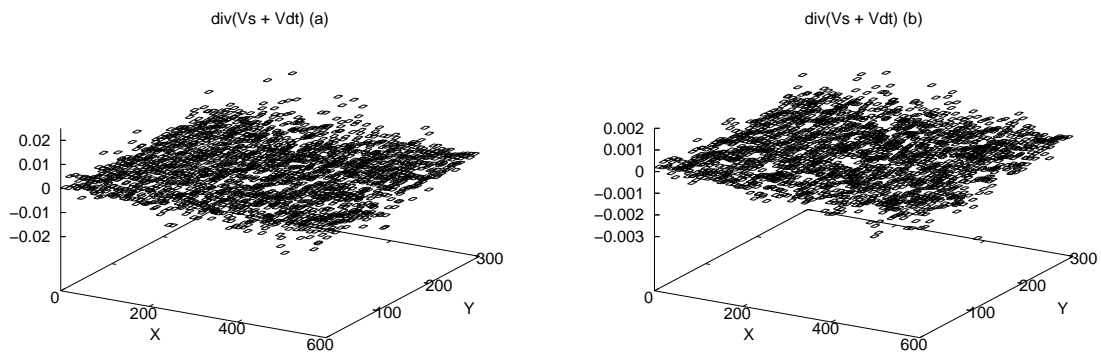
Nesta seção mostramos a relevância das técnicas de pós-processamento do campo de velocidades e da computação do efeito transiente da porosidade para a acurácia da solução numérica.

### 4.1 Importância do pós-processamento da velocidade de Darcy

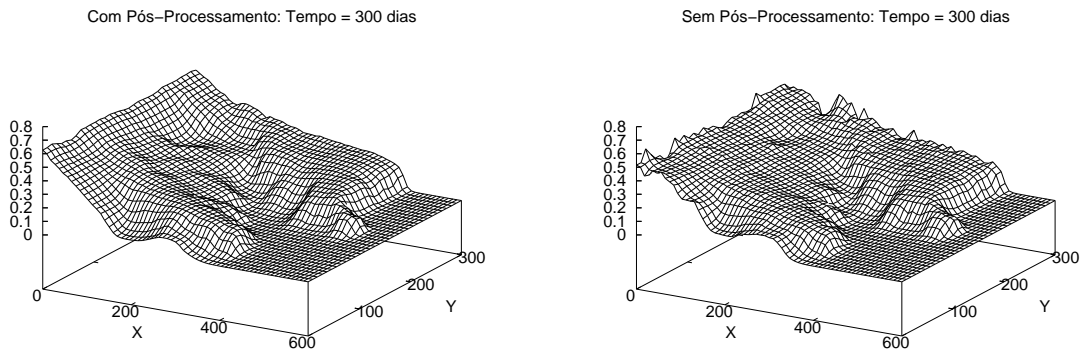
O pós-processamento adiciona à formulação variacional o resíduo do balanço de massa da lei de Darcy, com o intuito de fortalecer a equação de conservação de massa total do sistema (Eq. (2)) em nível de cada elemento. A Fig. 2 mostra o valor médio de  $\text{div}(\mathbf{v}_s + \mathbf{V}_{Dt})$  em cada elemento com e sem pós-processamento. Os campos de velocidade  $\mathbf{v}_s$  e  $\mathbf{V}_{Dt}$  foram obtidos no primeiro passo de tempo para um problema de injeção secundária de petróleo, com geometria e condições de bordo ilustradas na Fig. 1 e considerando um campo de permeabilidade heterogêneo e aleatório com distribuição fractal. Observamos na Fig. 2 que o pós-processamento resulta num decréscimo significativo do acúmulo de massa. A influência da geração de massa sobre a frente de mistura é ilustrada na Fig. 3, que apresenta a evolução do campo de saturação utilizando os campos de velocidades computados com e sem pós-processamento.



**Figura 1:** Condições de contorno e geometria do problema.



**Figura 2:** Valores de  $\text{div}(\mathbf{v}_s + \mathbf{V}_{Dt})$  sem pós-processamento (esquerda) e com pós-processamento (direita).



**Figura 3:** Gráficos do campo de saturação  $S_w$  com e sem o pós-processamento.

## 4.2 Resolução da equação de transporte com porosidade transiente

O objetivo deste teste computacional é ilustrar a relevância da técnica de decomposição de operadores, utilizada para computar o efeito transiente da porosidade sobre a equação de transporte. Para isso, testamos a discretização apresentada na Subseção 3.4 resolvendo numericamente o seguinte problema hiperbólico não linear: *dado o campo de porosidade transiente*



$\phi(t) = 0.4t + 0.1$ , achar função  $S_w(x, t)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,  $t \in (0, 1]$  tal que

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} \phi + S_w \frac{\partial S_w}{\partial x} = - \frac{\partial \phi}{\partial t} S_w,$$

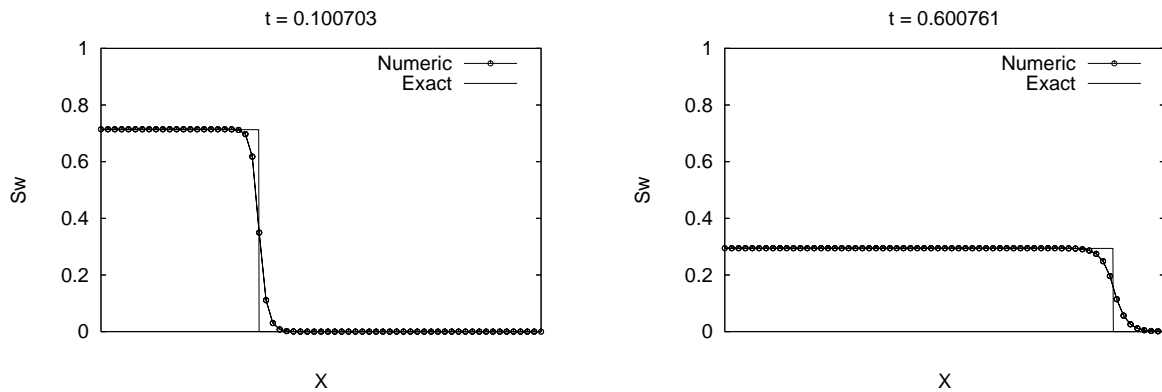
com condição inicial

$$S_w(x, 0) = 0,$$

e condição de contorno

$$S_w(x, t) = \frac{1}{\phi(t)} \text{ sobre } \Gamma_e.$$

A Fig. 4 compara as soluções exata e numérica para uma malha de 64 elementos com CFL inicial igual a 0.5. Neste teste os passos predictor e corretor do módulo do transporte são iterados sequencialmente para cada passo de tempo. Observamos que a solução numérica captura corretamente a frente de choque, evidenciando a precisão do esquema de correção e predição proposto.



**Figura 4:** Soluções para porosidade transiente nos tempos  $t = 0.100703$  e  $t = 0.600761$ .

## 5. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado um esquema de discretização para um modelo de acoplamento hidromecânico, considerando escoamento bifásico. Testes numéricos mostraram as potencialidades da técnica de pós-processamento de Petrov-Galerkin para a obtenção dos campos de velocidade conservativos, bem como a acurácia do esquema de predição e correção empregado nas equações de transporte. Nos trabalhos futuros propomos a extensão da implementação numérica para três dimensões e a utilização de métodos numéricos para o transporte mais precisos, como o método KT Ribeiro (2007) e a família dos métodos de Galerkin Descontínuo que apresentam menor difusão artificial e propriedades de estabilidade tão boas quanto às do método NT. Também propomos a utilização de métodos iterativos de alto desempenho para a resolução do sistema linear da poromecânica, o que nos permitirá aplicar a discretização apresentada neste trabalho em problemas de grande porte.

## Referências

- Abreu, E., 2007. *Modelagem e simulação computacional de escoamentos trifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos*. PhD thesis, IPRJ-UERJ.
- Arnold, D. N., Falk, R. S., & Winther, R., 2007. Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry. *MATHEMATICS OF COMPUTATION*, vol. 76, n. 260, pp. 1699–1723.
- David, T. & Settari, A., 2002. New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module. In *SPE/ISRM ROCK MECHANICS CONFERENCE*.
- Douglas, J., Furtado, F., & Pereira, F., 1997. On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs. *COMPUTATIONAL GEOSCIENCES*, vol. 1, pp. 155–190.
- Loula, A. F. D., Rochinha, F. A., & Murad, M. A., 1995. Higher-order gradient post-processings for second-order elliptic problems. *COMPUTER METHODS IN APPLIED MECHANICS AND ENGINEERING*, vol. 128, pp. 361–381.
- Mose, R., Siegel, P., Ackerer, P., & Chavent, G., 1994. Application of the mixed hybrid finite-element approximation in a groundwater-flow model luxury or necessity. *WATER RESOURCES RESEARCH*, vol. 30, n. 11, pp. 3001–3012.
- Murad, M. A., Thomee, V., & Loula, A. F. D., 1996. Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of biot's consolidation problem. *SIAM JOURNAL ON NUMERICAL ANALYSIS*, vol. 33, n. 3, pp. 1065–1083.
- Ribeiro, S. S., 2007. *Novos esquemas centrais de diferenças finitas para a simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo*. PhD thesis, IPRJ-UERJ.