

# IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS DE *SUBCYCLING* PARA A SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS ACOPLADOS DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS E TRANSFÊRENCIA DE CALOR

**Eduardo A. Viana**

**Andréa M. P. Valli**

Departamento de Informática, Universidade Federal do Espírito Santo,  
Av. Fernando Ferrari s/n, Goiabeiras, Vitória, ES, 29075-910, Brasil  
Email: avalli@inf.ufes.br

**Alvaro L.G.A. Coutinho**

Programa de Engenharia Civil, COPPE/Universidade Federal do Rio de Janeiro,  
Caixa Postal 68506, Rio de Janeiro, RJ, 21945-970, Brasil  
Email: alvaro@nacad.ufrj.br

**Resumo.** Neste trabalho é estudada e implementa uma técnica de “subcycling”, com o objetivo de minimizar o esforço computacional envolvido na simulação numérica de problemas acoplados. O modelo matemático é baseado nas equações em duas dimensões de Navier-Stokes acopladas à equação de transferência de calor para fluidos viscosos e incompressíveis, discretizadas pelo método de elementos finitos. A escolha do tamanho do passo é feita adaptativamente utilizando um esquema de avanço no tempo baseado na teoria de controle ou a técnica de particionamento. Resultados numéricos para os problemas de convecção natural e de Rayleigh-Benard mostram que uma escolha adequada do subcycling produz uma redução considerável no tempo de computação, reduzindo o esforço computacional sem uma perda significativa na precisão.

*Palavras chave:* problemas acoplados, elementos finitos, “subcycling”.

## 1. Introdução

Problemas que envolvem o escoamento de fluidos em regimes permanente ou transiente geralmente não possuem soluções analíticas conhecidas. Um dos meios disponíveis para análise de tal movimento é o emprego da simulação computacional. Entretanto, devido à complexidade das equações que governam a dinâmica dos fluidos e da necessidade de um grande número de pontos nas malhas, as técnicas computacionais de solução exigem grande capacidade e tempo de processamento. Surge então a necessidade do emprego de estratégias capazes de reduzir o tempo de computação, sem prejuízo significativo na precisão da solução obtida. Na integração numérica de equações diferenciais ordinárias resultantes do processo de discretização espacial, estratégias automáticas de escolha do tamanho do passo no tempo são, provavelmente, as ferramentas mais importantes para melhorar a eficiência de um método de integração.

Técnicas adaptativas para a seleção automática do passo de tempo são geralmente baseadas em medidas do erro de truncamento local aproximado ou por considerações puramente heurísticas. Por exemplo, Gresho et al. (1999) usa um esquema preditor-corretor com estimativas para o erro de truncamento local na seleção do passo em problemas de advecção e difusão. Algoritmos baseados em heurísticas para a seleção do passo de tempo para a condução de calor transiente e para as equações de Navier-Stokes podem ser encontrados em (Winget e Hughes, 1985; Johan et al., 1991). No entanto, algoritmos que usam o conceito de controle retro-alimentado, como mostram (Gustafsson et al., 1988; Gustafsson, 1991 e 1994, Valli et al., 2002 e 2004), vem sendo utilizados para a seleção automática do passo no tempo. Mais recentemente, Söderlind (2002 e 2003) desenvolveu algoritmos que usam filtros digitais no controle do passo no tempo.

O objetivo da seleção do passo no tempo é minimizar o esforço computacional para construir uma solução aproximada de um determinado problema, de acordo com uma precisão desejada. Quando as técnicas de controle do tamanho do passo no tempo são aplicadas a problemas de escoamentos de fluidos acoplados a transferência de calor, um único passo no tempo pode ser determinado a cada instante de integração de forma que as grandezas de interesse (velocidades e temperatura) são atualizadas a cada instante. No entanto, como estão sendo considerados dois processos físicos diferentes, o escoamento do fluido e a transferência de calor, pode ser que a natureza da resposta de cada processo aconteça em escalas de tempo distintas. Sendo assim, técnicas de particionamento que utilizam recursos do tipo *subcycling* podem ser uma boa alternativa para o avanço do passo no tempo.

Alguns problemas que envolvem sistemas dinamicamente acoplados vêm sendo tratados através de técnicas de particionamento. Por exemplo, Felippa et al. (2001) apresenta o uso de processos de particionamento para sistemas onde o principal componente é a estrutura. Em termo-mecânica podem ser encontradas importantes aplicações para estes tipos de sistemas. Piperno e Farhat (2000) também investigaram o uso de processos de particionamento para a solução transiente de problemas onde as equações de movimento da estrutura e do fluido devem ser resolvidas simultaneamente, com atenção especial aos processos de *subcycling*. Além disso, podemos encontrar na literatura esquemas de particionamento incondicionalmente estáveis para a integração simultânea de problemas transientes em termo-elasticidade, como mostra por exemplo Prevost (1997).

Este artigo é organizado da seguinte forma. Na próxima sessão é apresentado de maneira sucinta o modelo matemático dos problemas de interesse e a formulação de elementos finitos utilizada. Em seguida, são descritas as

estratégias de avanço no tempo utilizadas, ou seja, as técnicas de controle do passo no tempo e o algoritmo do *subcycling*. Depois, alguns resultados numéricos que comprovam a eficiência da técnica de particionamento para os problemas de convecção natural e Rayleigh-Benard são apresentados. Finalmente, as conclusões obtidas são apresentadas.

## 2. Formulação e aproximação

O modelo matemático que descreve os problemas de interesse é composto pelas equações transientes de Navier-Stokes, para fluidos viscosos e incompressíveis, acopladas à equação de transporte de calor,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{q} + \mathbf{f}(T) \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \nabla \cdot (K \nabla T) = 0 \quad (3)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor das velocidades,  $p$  é a pressão,  $\nu$  é a viscosidade,  $\rho$  é a densidade,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{f}(T)$  são as forças externas,  $T$  é a temperatura,  $c_p$  é o calor específico e  $K$  é a condutividade térmica. Condições iniciais e de contorno completam a formulação matemática do problema. Como o interesse neste trabalho reside nos cálculos das velocidades e das temperaturas, é considerada uma formulação penalizada de elementos finitos, para as equações de Navier-Stokes, e uma formulação de elementos finitos de Galerkin, para a equação de transporte de calor.

A formulação penalizada para as equações incompressíveis de Navier-Stokes foi projetada de forma a determinar uma formulação aproximada envolvendo somente as velocidades, excluindo a pressão. A discretização espacial das equações de Navier-Stokes fornece um sistema semi-discreto e não linear de equações diferenciais ordinárias, o qual é linearizado por iterações sucessivas e integrado no tempo usando o método de Crank-Nicolson. Então, para cada passo no tempo é preciso resolver um sistema linear na forma

$$\left( M + \frac{\Delta t}{2} (D + \nu A + \frac{1}{\varepsilon} B) \right) U_k^n = \left( M - \frac{\Delta t}{2} (D + \nu A + \frac{1}{\varepsilon} B) \right) U_k^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} (F^n + F^{n-1}) \quad (4)$$

onde o superíndice  $n$  representa o instante no tempo,  $k$  representa um passo do processo de iterações sucessivas. A matriz  $M$  é a matriz de massa,  $D$  é a matriz do termo de convecção,  $\nu A$  representa o termo de difusão, e  $B$  a matriz do termo de penalização. O vetor  $F$  depende da temperatura e representa o acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e transporte. O sistema linear (4) é resolvido por um método direto do tipo frontal e uma aproximação para as velocidades no instante atual  $t_n$  é obtida,  $U^n$ .

Na equação de transporte da temperatura é utilizado um esquema tradicional de Galerkin, no qual fornece um sistema semi-discreto de equações diferenciais ordinária. Integrando este sistema implicitamente usando o método de Crank-Nicolson, é preciso resolver em cada passo no tempo um sistema linear da forma,

$$\left( N + \frac{\Delta t}{2} (R(U^n) + E) \right) T^n = \left( N - \frac{\Delta t}{2} (R(U^{n-1}) + E) \right) T^{n-1} \quad (5)$$

onde  $N$  representa a matriz de massa,  $R$  é a matriz correspondente ao termo de convecção,  $E$  é a matriz do termo de difusão e  $U^n$  é a solução aproximada para as velocidades nos nós da malha no tempo  $t_n$ . O sistema linear (5) também é resolvido utilizando o método direto frontal e uma aproximação para a temperatura no instante atual  $t_n$  é obtida,  $T^n$ .

O algoritmo geral que resolve as equações de Navier-Stokes (1) e (2) e a equação de transporte de temperatura (3) utiliza uma formulação desacoplada. Primeiro, as velocidades no instante atual de tempo  $n$  são obtidas em (4) utilizando as velocidades e temperatura no instante anterior  $n-1$ , ou seja, no lado direito da Eq. (4)  $F^n$  é aproximado por  $F^{n-1}$ . Em seguida, a equação linear (5) utiliza as novas velocidades, assim como, a temperatura e as velocidades no instante anterior para obter a temperatura no instante atual  $t_n$ . Este processo continua até que o tempo final seja atingido ou, no caso de um problema em regime permanente, que as diferenças entre as temperaturas e velocidades em dois tempos consecutivos fiquem abaixo de uma tolerância fornecida. Maiores detalhes sobre as formulações de elementos finitos podem ser encontrados em Valli, et al. (2002 e 2004).

### 3. Estratégias de avanço no tempo

#### 3.1. Algoritmo de controle do passo no tempo

Em geral, um algoritmo típico de escolha do passo no tempo para métodos de integração, como os métodos explícitos de Runge-Kutta de ordem  $r$ , pode ser escrito como:

$$\Delta t_{n+1} = \left( \frac{tol}{e_n} \right)^{\frac{1}{r}} \Delta t_n \quad (6)$$

onde  $tol$  é uma tolerância dada,  $e_n$  é uma estimativa do erro de truncamento local no instante de tempo  $t_n$ ,  $r$  é a ordem do método de integração,  $\Delta t_{n+1}$  é o novo passo calculado e  $\Delta t_n$  é o passo no instante anterior. Analisando a Eq. (6), é possível observar que se o erro de truncamento local for menor que a tolerância desejada, o tamanho do passo no instante  $\Delta t_{n+1}$  será maior que no instante anterior, ou seja, o algoritmo aumenta o tamanho do passo. Se ao contrário, o erro for maior que a tolerância, o algoritmo diminui o tamanho do passo. Estes algoritmos normalmente funcionam bem. No entanto, existem equações diferenciais ordinárias e métodos de integração para os quais sua atuação é inaceitável, pois o tamanho do passo oscila demasiadamente e/ou o número de passos no tempo rejeitados é muito grande.

Gustafsson et al. (1988) mostrou que o problema de escolha do tamanho do passo no tempo pode ser visto como um problema de controle retroalimentado do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Utilizando estas idéias, o algoritmo de controle do tamanho do passo pode ser representado pela expressão,

$$\Delta t_{n+1} = K_P \left( \frac{e_{n-1}}{e_n} \right) K_I \left( \frac{tol}{e_n} \right) K_D \left( \frac{e_{n-1}^2}{e_n e_{n-2}} \right) \Delta t_n \quad (7)$$

onde  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  são os parâmetros relacionados com os controladores proporcional, integral e derivativo, respectivamente. Para calcular os erros de truncamento locais  $e_{n-2}$ ,  $e_{n-1}$ ,  $e_n$ , são necessárias três estimativas da solução em três instantes consecutivos. O erro de truncamento local no instante  $t_n$  é definido como sendo

$$e_n = \max(e_u, e_T), \quad e_u = \|U^n - U^{n-1}\| / \|U^n\|, \quad e_T = \|T^n - T^{n-1}\| / \|T^n\| \quad (8)$$

onde  $U^n$  e  $T^n$  são as soluções aproximadas para o campo de velocidade e temperatura no instante  $t_n$ , respectivamente. O algoritmo PID de controle do passo no tempo pode ser resumido pelas etapas apresentadas na Fig. 1.

1. Entrada:  $U^{n-1}$ ,  $U^n$ ,  $T^{n-1}$ ,  $T^n$ ,  $t$ ,  $\Delta t$ ,  $n$ ,  $e_{n-2}$ ,  $e_{n-1}$
  2. Dados do controlador PID:  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ ,  $\Delta t_{min}$ ,  $\Delta t_{max}$ ,  $tol$
  3. Inicializa variáveis:  $n_{rej} = 0$ ,  $\Delta t_{prev} = \Delta t_{min}$
  4. Calcula  $e_n$
  5. Se ( $e_n > tol$ ) e ( $\Delta t > \Delta t_{min}$ ) então rejeita o passo:
    - a.  $n_{rej} = n_{rej} + 1$
    - b.  $U^n = U^{n-1}$ ,  $T^n = T^{n-1}$
    - c.  $t = t - \Delta t$ ,  $n = n - 1$
    - d.  $fator = 1 / e_n$ , Se ( $fator > 0.8$ )  $fator = 0.8$
    - e.  $\Delta t = \text{Max} (fator * \Delta t, \Delta t_{min})$
    - f.  $\Delta t_{prev} = \Delta t^2 / \Delta t_{prev}$
  - Senão
    - g. calcula  $\Delta t$  usando (7)
    - h.  $\Delta t = \max(\Delta t, \Delta t_{min})$
    - i.  $\Delta t = \min(\Delta t, \Delta t_{max})$
    - j.  $\Delta t_{prev} = \Delta t$
    - k.  $e_{n-2} = e_{n-1}$ ,  $e_{n-1} = e_n$
- Fim-se

Figura 1. Algoritmo PID para escolha do tamanho do passo de tempo.

Inicialmente, uma estimativa do erro de truncamento local é feita. Se o erro for maior que uma tolerância fornecida, este passo é descartado e uma nova integração no tempo é iniciada com um passo cujo tamanho é escalado em função

da magnitude do erro e da tolerância. Caso contrário, o processo continua e um novo passo no tempo é determinado utilizando a expressão (7). Para prevenir um crescimento ou uma redução excessiva do passo, são impostos valores mínimo e máximo admissíveis para o seu tamanho,  $\Delta t_{min}$  e  $\Delta t_{max}$ . Estudos paramétricos realizados por Valli et al. (2002 e 2004) mostram que, para os casos estudados neste artigo, valores de  $K_P = 0.075$ ,  $K_I = 0.175$ ,  $K_D = 0.01$ , apresentam bons resultados. Desta forma, estes mesmos valores foram adotados nos experimentos.

### 3.2. Técnica de particionamento do tipo “subcycling”

O avanço no tempo nos problemas estudados é feito através de passos sucessivos cujos tamanhos podem ser predeterminados (passo fixo) ou escolhidos pelo algoritmo de controle apresentado. Nos dois casos, as velocidades e as temperaturas são calculadas em cada iteração no tempo. No entanto, como estão sendo simulados dois processos físicos diferentes, o escoamento de um fluido e a transferência de calor, é possível que a natureza da resposta de cada processo aconteça em tempos físicos distintos. Sendo assim, foi estudada e implementada uma técnica de particionamento, conhecida como *subcycling*, onde as equações de Navier-Stokes e de transporte de temperatura são resolvidas usando tamanhos de passos diferentes, ou seja, uma das variáveis de interesse é atualizada, velocidade ou temperatura, em cada instante no tempo e a outra é mantida fixa por alguns passos.

Para aplicar a técnica de subcycling é necessário definir quantos sub-passos deverão ser dados em uma das equações. Conhecido o número de sub-passos, é possível definir automaticamente o tamanho do passo usado que será usado na outra equação, que terá um tamanho correspondente à  $n$  sub-passos usados na primeira equação. Ou seja, se for definido que serão usados  $n$  sub-passos de tamanho  $\Delta t$  na primeira equação, cada passo usado na segunda equação terá um tamanho correspondente à  $n \times \Delta t$ . Alguns passos iniciais de tamanhos iguais, onde serão atualizadas as velocidades e a temperatura, são realizados. Nos testes o subcycling é utilizado tanto nas equações de Navier-Stokes quanto na equação de transporte de calor. A Figura 2 mostra o esquema de particionamento subcycling quando aplicado à equação de transporte.

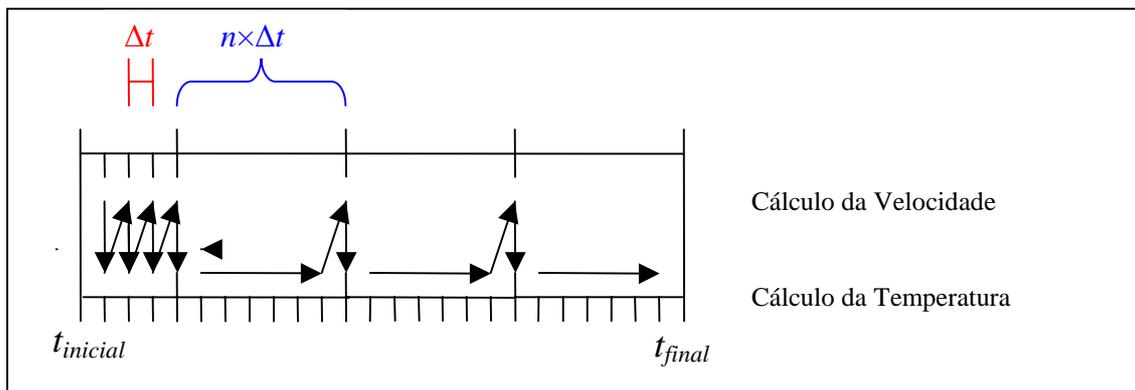


Figura 2. Esquema do algoritmo subcycling para o problema acoplado.

É possível observar na Fig. 2 que, após alguns passos de tamanho fixo igual a  $\Delta t$ , onde são atualizadas a velocidade e a temperatura a cada instante do tempo, o esquema do subcycling começa a agir. Mantendo fixas as velocidades em  $n$  passos, a temperatura é atualizada a cada instante do tempo. Passado um ciclo do processo, as velocidades são recalculadas utilizando a temperatura no instante anterior. Este processo termina quando atingimos o tempo final dos cálculos. Como nos problemas físicos estudados a seguir o processo de escoamento é mais lento que a transferência de calor no meio, vamos observar que o esquema de subcycling aplicado à equação de transporte funciona muito bem, enquanto que o subcycling nas equações de Navier-Stokes não é adequado aos problemas implementados.

### 4. Resultados numéricos

As equações que descrevem os problemas de convecção natural e de Rayleigh-Benard estão apresentadas a seguir na sua forma adimensional.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{em } \Omega \times I \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \frac{Ra}{Pr} T \mathbf{g} \quad \text{em } \Omega \times I \quad (10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T - \frac{1}{Pr} T = 0 \quad \text{em } \Omega \times I \quad (11)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor das velocidades,  $p$  é a pressão,  $T$  é a temperatura,  $\mathbf{g}$  é o vetor da gravidade,  $\Omega$  é o domínio espacial e  $I=[0,t]$  é o intervalo de tempo. Os parâmetros adimensionais são: o número de Rayleigh,  $Ra = (\beta_T \Delta T g L^3) / \nu\alpha$ , o número de Prandtl,  $Pr = \nu / \alpha$ , onde  $\beta_T$  é o coeficiente térmico,  $\Delta T$  é um fator de escala,  $L$  é o comprimento do meio,  $\nu$  é a viscosidade cinemática e  $\alpha$  é a difusividade térmica. Condições iniciais e de contorno completam o modelo matemático das equações.

O primeiro experimento envolve convecção natural num quadrado de dimensões unitárias, com temperaturas  $T=1$  e  $T=0$  nas laterais esquerda e direita, respectivamente, e sem trocas de calor nas partes superior e inferior do quadrado. Os termos adimensionais das equações são  $Pr = 0.71$  e  $Ra = 1000$ . O número de Nusselt,  $Nu$ , é calculado na lateral esquerda do quadrado unitário e comparado com os resultados obtidos por Davis (1983). O número de Nusselt é definido pela equação,

$$Nu = \int q dy \tag{12}$$

onde  $q$  é o fluxo de calor. As velocidades e temperaturas são calculadas usando elementos quadriláteros isoparamétricos de 9 nós em uma malha uniforme de 16x16 elementos, o que corresponde a 33x33 nós. A escolha do tamanho do passo inicial é muito importante, devendo ser feita de forma que o processo não linear nas equações de Navier-Stokes convirja. É considerado um passo inicial de tamanho  $\Delta t = 0.01$ , e os seguintes dados de entrada para o algoritmo PID de controle do passo no tempo:  $\Delta t_{min}=0.01$ ,  $\Delta t_{max}=0.1$  e  $tol=0.1$ . A Figura 3 mostra as linhas de corrente e os contornos de temperatura obtidos para o problema de convecção natural. Os valores dos contornos são os mesmos mostrados por Davis (1983) e estão em perfeita concordância com os mostrados na Fig. 3.

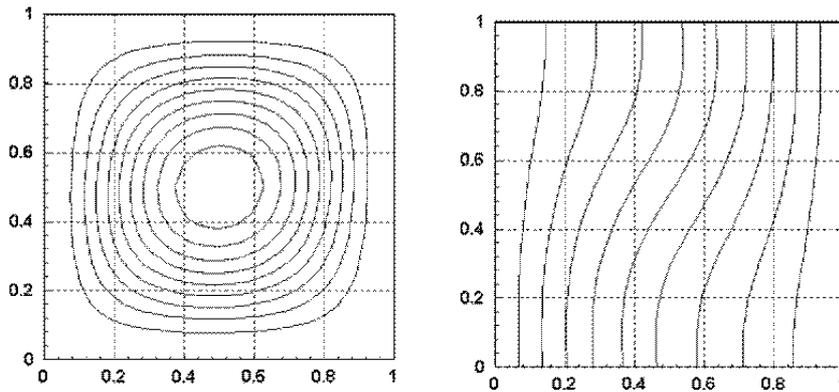


Figura 3. Linhas de corrente (igualmente espaçados (0.1174) entre -1.0566 e 0) e contornos de temperatura (igualmente espaçados (0.1) entre 1 e 0) para o problema de convecção natural.

O problema é resolvido considerando passos de tempo fixo igual a 0.01, o algoritmo de controle do passo no tempo e os algoritmos de *subcycling* nas equações de Navier-Stokes e de transporte, e os resultados estão resumidos na Tab. 1. Os números de Nusselt e os correspondentes erros percentuais calculados em relação ao valor de referência,  $Nu=1.117$ , encontrado por Davis (1983) estão mostrados na Tab. 1. Como podem ser observados, os resultados estão bem próximos do valor de referência, de modo que os erros percentuais não ultrapassam a 2% em nenhum caso.

Tabela 1. Número de Nusselt e os erros percentuais correspondentes para o problema de convecção natural.

	Passo Fixo	PID	Subcycling em Navier_Stokes	Subcycling em transporte
Número de Nusselt	1.118	1.119	1.118	1.119
Erro Percentual	0.1	0.2	0.1	0.2

A Tabela 2 contém o esforço computacional necessário na obtenção das soluções numéricas do problema de convecção natural. O esforço computacional é definido como sendo a razão entre o número de iterações não-lineares necessárias para o cálculo das velocidades usando o processo de controle ou a técnica de *subcycling*, e o número de iterações não-lineares necessárias para o cálculo das velocidades usando um passo de tamanho fixo. O esforço computacional é sensivelmente reduzido quando o controlador PID é utilizado, como pode ser observado na Tab. 2. Neste caso, o problema tratado foi resolvido 1.8 vezes mais rápido do que quando passos de tamanho fixo estavam sendo usados. No caso da técnica de particionamento, somente o *subcycling* em transporte obteve bons resultados. Neste caso, foram utilizados 2 passos iniciais de tamanho iguais a 0.01, antes do início do processo de *subcycling* nas

equações de transporte, e 3 sub-passos para cada passo realizado nas equações de Navier-Stokes. A solução foi obtida 2.2 vezes mais rápida do que a solução que utiliza passos fixos.

Tabela 2. Número de Nusselt e os erros percentuais correspondentes para o problema de convecção natural.

	Número de Iterações	Esforço Computacional
Passo Fixo (referência)	58	1
PID	32	0,55
<i>Subcycling</i> em Navier-Stokes	59	1,02
<i>Subcycling</i> em Transporte	26	0,45

Para o *subcycling* nas equações de Navier-Stokes, alguns testes foram realizados, no entanto nenhum resultado mostrou-se vantajoso. O melhor resultado está mostrado na Tab. 2, onde foram dados 13 passos iniciais antes de iniciarmos o *subcycling* com 3 sub-passos nas equações de Navier-Stokes. Sendo assim, neste exemplo, os resultados obtidos, usando a técnica de controle do tamanho do passo no tempo e a técnica de *subcycling* em transporte, proporcionaram erros percentuais inferiores a 2% com um esforço computacional reduzido. No caso do *subcycling* em transporte a solução foi obtida 2,2 mais rápida. Além do mais, devido ao fato do processo de transferência de calor acontecer mais rápido que o escoamento do fluido no meio, o *subcycling* nas equações de Navier-Stokes não é adequado, como confirmou os resultados.

No segundo experimento é investigada a formação de células de Rayleigh-Benard em duas dimensões. O problema de Rayleigh-Benard corresponde ao escoamento de um fluido entre duas placas horizontais, onde a placa superior é mantida a uma temperatura constante e a placa inferior a uma temperatura também constante, porém maior que a temperatura da placa superior. Para um número de Rayleigh crítico, o fluido aquecido próximo da placa inferior se torna menos denso e se eleva, enquanto o fluido próximo à superfície desce, ocorrendo uma troca de posições entre eles. Esse processo é idêntico à convecção natural, contudo o escoamento agora se dá em um espaço retangular, com proporções de 4:1 (comprimento: largura). A placa superior e a placa inferior mantêm-se a uma temperatura de  $T=0$  e  $T=1$ , respectivamente. As velocidades e temperaturas são calculadas usando uma malha de 32x8 elementos quadriláteros isoparamétricos de 9 nós. Os parâmetros adimensionais das equações governantes são  $Pr = 0.72$  e  $Ra = 30000$ . Para os dados de entrada do algoritmo de controle do passo no tempo são considerados os seguintes valores:  $\Delta t_{min}=0.001$ ,  $\Delta t_{max}=0.5$  e  $tol=0.01$ .

A Tabela 3 mostra o esforço computacional necessário na obtenção da solução do problema de Rayleigh-Benard. As soluções para o problema são obtidas com um número reduzido de aproximações sucessivas quando o algoritmo PID foi utilizado. Neste caso, a solução é alcançada aproximadamente 1.14 vezes mais rápida do que a solução obtida com passos fixos. No caso do *subcycling* em transporte, o melhor resultado foi obtido com o uso de 2 passos iniciais e 3 sub-passos. O esforço computacional foi o menor entre todos os testes realizados, sendo a solução obtida 3,2 vezes mais rápida. O melhor resultado com a aplicação do *subcycling* nas equações de Navier-Stokes foi alcançado com o uso de 100 passos iniciais e 2 sub-passos, o que gerou o maior esforço computacional entre todos os casos estudados. Portanto, repetindo os resultados obtidos no problema de convecção natural, a técnica de particionamento do tipo *subcycling* deve ser aplicada na equação de transporte de temperatura.

Tabela 3. Medidas do esforço computacional no problema de Rayleigh-Benard.

	Número de Iterações	Esforço Computacional
Passo Fixo (referência)	731	1
PID	643	0.88
<i>Subcycling</i> em Navier-Stokes	819	1.12
<i>Subcycling</i> em Transporte	230	0.31

Para efeito de comparação, foram utilizados os gráficos das linhas de corrente formadas no processo de escoamento do fluido, tomando como referência o caso em que o problema é resolvido com passos de tamanho fixo. A Figura 4 mostra as linhas de corrente de referência, quando as soluções são calculadas com passo fixo, e as linhas de corrente obtidas quando é aplicado o *subcycling* na equação do transporte de calor. É possível observar que as soluções aproximadas estão bem próximas, o que significa que a escolha do passo no tempo utilizando a técnica de *subcycling* não alterou de maneira significativa a precisão da solução aproximada.

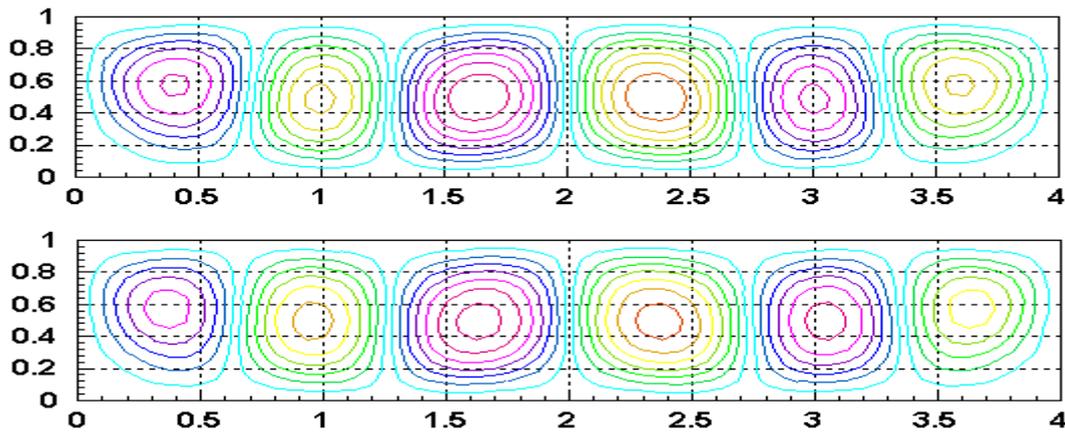


Figura 4. Linhas de corrente de referência (topo) e linhas de correntes com *subcycling* (base).

## 5. Conclusões

Neste trabalho foi investigado o uso de uma técnica de particionamento, denominada *subcycling*, para solução de sistemas acoplados, visando aumentar a eficiência computacional do código de elementos finitos. Os resultados obtidos com o *subcycling* foram comparados com os resultados obtidos usando um algoritmo de controle do tamanho do passo no tempo. As técnicas estudadas foram aplicadas na resolução e na simulação numérica dos problemas de convecção natural e de Rayleigh-Benard, os quais são modelados matematicamente pelas equações de Navier-Stokes acopladas à equação de transporte de temperatura. Para verificação qualitativa e quantitativa dos resultados quanto ao esforço computacional, foi considerado como referência os resultados obtidos com o uso do passo de tamanho fixo.

Os resultados alcançados no algoritmo de controle do passo no tempo na resolução dos problemas analisados permitem concluir que é possível determinar soluções aproximadas com um número menor de passos e sem perda significativa de precisão, visto que os erros percentuais das quantidades medidas no problema de convecção natural não chegaram sequer a alcançar 2%. O esforço computacional também foi sensivelmente reduzido, tanto no problema de convecção natural quanto no problema de Rayleigh-Benard. No primeiro problema, o esforço computacional medido foi de 0.55, o que permitiu resolver o problema pelo menos 1.8 vezes mais rápido do que com o uso de passo fixo. No segundo problema, o esforço computacional foi de 0.88, proporcionando uma resolução do problema 1.14 vezes mais rápido do que com o uso de passo fixo.

Com a técnica de *subcycling*, é possível concluir que os problemas tratados podem ser resolvidos com menor esforço computacional quando aplicamos o *subcycling* na equação de transporte de temperatura. Tanto no problema de convecção natural quanto no problema de Rayleigh-Benard, o esforço computacional resultante foi reduzido, sendo menor do que os encontrados no algoritmo de controle PID. No primeiro problema, a solução foi obtida 2.2 vezes mais rápida e, no segundo problema, a solução foi obtida 3.2 vezes mais rápida. No entanto, o uso da técnica de *subcycling* nas equações de Navier-Stokes não alcançou resultados satisfatórios, dado que o esforço computacional correspondente foi de 1.02, no caso do problema de convecção natural, e de 1.12, no caso do problema de Rayleigh-Benard. Estes resultados confirmam que, como estão sendo simulados dois processos físicos diferentes, é razoável esperar que cada processo aconteça em escalas de tempo distintas.

Sendo assim, é possível concluir que tanto a técnica de controle do tamanho do passo quanto à técnica de particionamento do tipo *subcycling* para os problemas acoplados tratados neste trabalho são eficientes na redução do esforço computacional. Certamente a utilização simultânea do controle automático do passo de tempo e da técnica de *subcycling* tem grande potencial. Este será um tema explorado em futuro próximo e a sua aplicabilidade testada em problemas de interesse

## 6. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio parcial da CAPES, dentro da cooperação internacional CAPES-Universidade do Texas, Austin, EUA, e com apoio do CNPq, dentro do programa institucional de bolsas de iniciação científica - PIBIC. O Prof. Alvaro L. G. A. Coutinho agradece o apoio do CNPq/MCT.

## 7. References

Carey, G.F. e Oden, J.T., 1986, "Finite Elements: Fluid Mechanics (Texas Finite Element Series)", Prentice Hall, 304 p.  
 de Vahl Davis, G., 1983, "Natural convection of a air in a square cavity: a benchmark numerical solution", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, pp.249-264.

- Felippa, C.A., Park, K.C. e Farhat, C., 2001, "Partitioned analysis of coupled mechanical systems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 3247-3270.
- Gresho, P.M., Sani, R.L. e Engelman, M.S., 1999, "Incompressible Flow and the Finite Element Method - Advection-Difusion and Isothermal Laminar Flow", John Wiley and Sons Ltd, Chichester.
- Gustafsson, K., Lundh, M. e Söderlind G., 1988, "A PI stepsize control for the numerical solution for ordinary differential equations", *BIT*, Vol.28, pp. 270-287.
- Gustafsson, K., 1991, "Control theoretic techniques for stepsize selection in explicit Runge-Kutta methods", *ACM TOMS*, Vol. 17, pp. 533-554.
- Gustafsson, K., 1994, "Control theoretic techniques for stepsize selection in implicit Runge-Kutta methods", *ACM TOMS*, Vol. 20, pp.496-517.
- Johan, Z., Hughes, T.J.R. e Shakib, F., 1991, "A globally convergent matrix-free algorithm for implicit time-marching schemes arising in finite element analysis in fluids", *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. 87, pp. 281-304.
- Piperno, S. e Farhat, C., 2000, "Design of efficient partitioned procedures for the transient solution of aeroelastic problems, *Revue Européenne des Eléments Finis, Fluid-Structure Interaction*, Vol. 9, No. 6-7, pp. 655-680.
- Prevost, J.H., 1997, "Partitioned solution procedure for simultaneous integration of coupled-field problems", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, pp. 239-247.
- Söderlind, G., 2002, "Automatic control and adptive time-stepping", *Numerica Algorithms*, Vol. 31, pp. 281-310.
- Söderlind, G., 2003, "Digital filters in adptive time-stepping", *ACM Trans. Math. Software*, Vol. 29, pp. 1-26.
- Valli, A.M.P., Carey, G.F. e Coutinho, A.L.G.A., 2002, "Control strategies for timestep selection in simulation of coupled viscous flow and heat transfer", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol.18, pp. 131-139.
- Valli, A.M.P., Carey, G.F. e Coutinho, A.L.G.A., 2004, "Control strategies for timestep selection in finite element simulation of incompressible flows and coupled reaction-convection-diffusion processes", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, aceito para publicação.
- Winget, J.M. e Hughes, T.J.R., 1985, "Solution algorithms for nonlinear transient heat conduction analysis employing element-by-element iterative strategies", *Comput. Methods Appl. Mech. and Engrg.*, Vol. 52, pp. 711-815.

## **IMPLEMENTATION OF SUBCYCLING DEVICES TO SIMULATE COUPLED PROBLEMS INVOLVING INCOMPRESSIBLE FLOWS AND TRANSPORT OF HEAT**

Eduardo A. Viana  
Andréa M. P. Valli  
Department of Computer Science,  
Federal University of Espírito Santo,  
Av. Fernando Ferrari, Goiabeiras, Vitória, ES, 29075-910, Brazil  
Email: avalli@inf.ufes.br

Alvaro L.G. A.Coutinho  
Program of Civil Engineering, COPPE/Federal University of Rio de Janeiro,  
P.O. Box 68506, Rio de Janeiro, RJ, 21945-970, Brazil  
Email: alvaro@nacad.ufrj.br

### **Abstract**

This work investigates the use of partitioned analysis of coupled systems involving fluid-thermal interaction. Viscous flows are modeled by incompressible 2D Navier-Stokes equations, with a forcing term that may depend on the temperature, coupled to the transport of heat by convection and conduction. Of particular interest in the present work is the 2D Rayleigh-Benard flow. The finite element flow formulation is based on a penalty Galerkin method and the transport equation utilizes a Galerkin approach. In the partitioned solution approach, the systems are spatially decomposed into partitions, and the solution is separately advanced in time over each partition. Interaction effects are accounted for by transmission and synchronization of coupled state variables. We focus our attention on alternative algorithms and implementation possibilities using subcycling devices in conjunction with control time step algorithms.

Keywords: coupled problems, finite elements, "subcycling."