$2^{\underline{a}}$ **Prova de Cálculo Numérico - 09/1**

Aluno: ____

Obs: Use quatro casas decimais com arredondamento em todas as questões. Boa Sorte.

$1^{\underline{a}}$ Questão: a) (0.5 ponto) Localize graficamente as raízes da equação abaixo e determine intervalos para cada uma delas.

$$f(x) = xe^{-x} - e^{-3} = 0.$$

b) (1.5 pontos) Calcule duas iterações do método da bisseção para calcular uma das raízes da equação acima isolada no intervalo $[0, 1]$. Quantas iterações são necessárias para calcular uma aproximação para essa raiz com precisão $\epsilon = 10^{-3}$.

c) (1.0 ponto) Calcule a iteração x_{14} para a sequência $\{x_k\}$ dada abaixo, gerada pelo método de Newton-Raphson para o cálculo do zero de $f(x)$ em $(0, 1)$, com $x_0 = 0.9$. Avalie se os critérios de convergência são satisfeitos para $\epsilon = 10^{-3}$.

$x_0 = +0.9$	$x_5 = -3.4962$	$x_{10} = -0.3041$
$x_1 = -6.8754$	$x_6 = -2.7182$	$x_{11} = +0.0427$
$x_2 = -6.0024$	$x_7 = -1.9863$	$x_{12} = +0.0440$
$x_3 = -5.1452$	$x_8 = -1.3189$	$x_{13} = +0.0480$
$x_4 = -4.3079$	$x_9 = -0.7444$	$x_{14} = \ ?$

d) (0.5 ponto) Justifique teoricamente o comportamento da sequência $\{x_k\}$ acima.

e) (1.5 pontos) Calcule duas iterações do método da secante com $a = 0.0$ e $b = 0.5$, apresentando os cálculos para os critérios de parada utilizados.

f) (1.0 ponto) Como podemos comparar as sequências geradas pelos métodos iterativo linear (ou ponto fixo), o método de Newton-Raphson e o método da secante em termos da ordem de convergência? Explique o que é a ordem de convergência de um método.

$2^{\underline{a}}$ Questão: a) (1.5 pontos) Considere o problema de valor inicial de segunda ordem,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.3(1 + (\frac{dy}{dx})^2)(20 - x)$$

com condições iniciais, $y(0) = 0$ e $\frac{dy}{dx}(0) = 0$. Calcule uma aproximação para $\frac{dy}{dx}(1.0)$ pelo método de Euler usando dois passos.

b) (2.5 pontos) Deduza o método de Euler Modificado a partir da sua interpretação geométrica dada na Figure 1, ou seja, encontre a expressão para y_{n+1}. Este é um método de Runge-Kutta de segunda ordem cujas constantes estão mostradas na tabela abaixo. Escreva também a fórmula do método a partir da notação de Butcher e diga quantas iterações são necessárias para calcular uma aproximação para a solução do problema de valor inicial, $\frac{dy}{dx} = ye^{\sqrt{xy}}$, $y(2) = 1$ no ponto $x = 5$ com $h = 0.01$. O que se pode dizer a respeito do tamanho do erro cometido para calcular uma aproximação para $y(5)$?

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Na Figura 1, $y(x)$ é a solução exata da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Temos ainda:
Reta $L_1 : z_1(x)$: reta que passa por (x_n, y_n) e é tangente a $y(x)$ em (x_n, y_n).
Reta $L_2 : z_2(x)$: reta que tem inclinação $f(P)$.
Reta $L_3 : z(x)$: reta que passa por (x_n, y_n) e é paralela a L_2.

A solução aproximada é dada por $y_{n+1} = z(x_n + h)$.

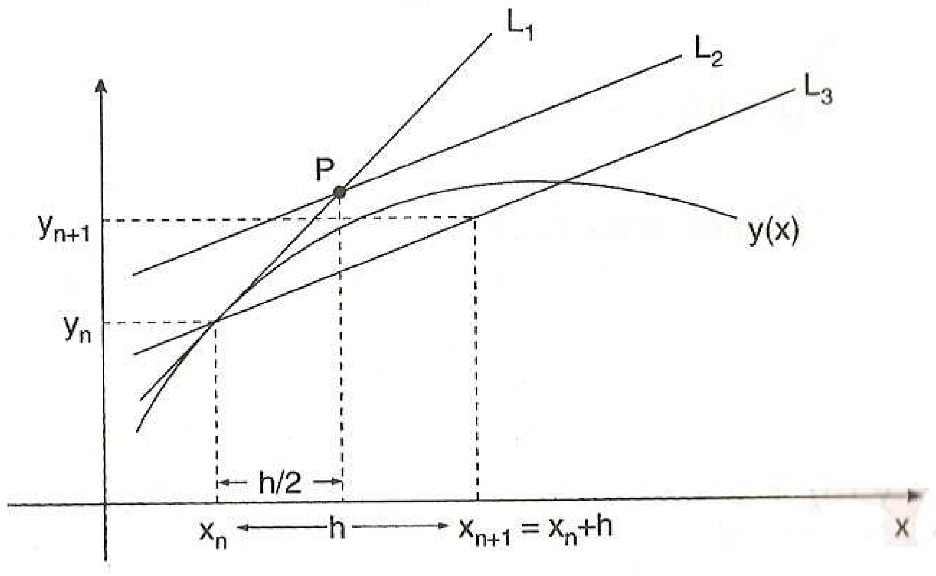

Figure 1: Método de Euler Modificado.