$1^{\underline{a}}$ Prova de Cálculo Numérico - 08/2

Aluno: ____________________

$1^{\underline{a}}$ Questão: a) (1.5 pontos) Resolva o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivoteamento parcial e calcule o resíduo (use 3 casas decimais).

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 1.0 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 &= 0.4 \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -0.4 \end{aligned}$$

b) (1.0 ponto) Quais são os fatores L, U e P da fatoração LU da matriz acima? Não precisa resolver de novo, aproveite o que foi feito no intem a). Indique como podemos verificar se a decomposição LU encontrada está correta (sem ter que obter a solução final)?

c) (1.5 pontos) Escreva as expressões das sequências obtidas pelos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel, depois de organizar adequadamente o sistema. Podemos afirmar que estas sequências geradas pelos dois métodos irão convergir? Por que? Calcule a $1^{\underline{a}}$ iteração para o método de Gauss-Seidel considerando $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ e o error relativo obtido.

$2^{\underline{a}}$ Questão: a) (1.5 pontos) Dada uma tabela com n experimentos (x_k, y_k), $k = 1, 2, ..., n$, escreva as condições necessárias para ajustar uma curva do tipo $a + \frac{b}{\log\sqrt{x}}$ pelo método dos Quadrados Mínimos e obtenha as expressões do sistema normal resultante. Não precisa resolver o sistema.

b) (1.0 ponto) Ajustando os dados abaixo pelo método dos Quadrados Mínimos utilizando uma reta e uma parábola obtemos $y = 0.18x + 0.45$ e $y = -0.3x^2 + 0.93x + 0.075$, respectivamente. Como você compararia as duas curvas com relação aos dados? Ou seja, qual é a melhor escolha? ($r^2 = 1 - \frac{D(b_0,b_1,...)}{\sum y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2}$ e $\sigma^2 = \frac{D(b_0,b_1,...)}{n-p}$)

x_k	0.5	1.0	1.5	2.0
y_k	0.5	0.6	0.9	0.7

$3^{\underline{a}}$ Questão: a) (1.5 pontos) Determine uma aproximação para $y(1.1)$ usando o método de Euler Modificado (tabela dada abaixo) com $h = 0.05$ para o PVI

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - (e^y - xy) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Qual é a ordem do erro de trucamento local e global para este método?

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

b) (1.0 ponto) Mostre geometricamente um passo do método de Euler.

c) (1.0 ponto) Indique como resolver o sistema de ODE de ordem três

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 + y_3 \\ y_2' &= -y_1 - y_3 \\ y_3' &= y_1 - y_2 \end{aligned}$$

com condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = 1$, no intervalo $[0, 1]$ e $m = 100$ (o número de subintervalos em $[0, 1]$, utilizando o método de Euler. Ou seja, obtenha as expressões para o método de Euler e indique o que temos que fazer.