Aluno:

1ª Questão: a) (1.5 pontos) Determine a decomposição LU com pivoteamento parcial do sistema abaixo, apresentando as matrizes L e U, assim como o vetor de permutação *pivot* (três casas decimais com arredondamento). Como podemos verificar se a decomposição LU está correta?

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

b) (1.5 ponto) Como devem ser os elementos da matriz L quando usamos a técnica de pivoteamento parcial? Modifique o algoritmo da decomposição LU abaixo para incluir a técnica de pivoteamento parcial. Saia com a matriz A e *pivot*, o vetor das permutações.

```
Entrada: n e A;   Saída: A
Para j ← 1 até n − 1 faça
    Se abs(A(j,j)) ≠ 0 então
        r ← 1/A(j,j)
        Para i ← j + 1 até n faça
            m ← A(i,j) ∗ r; A(i,j) ← m
            Para k ← j + 1 até n faça
                A(i,k) ← A(i,k) − m ∗ A(j,k)
            Fim-Para
        Fim-Para
    Fim-Se
Fim-Para
```

c) (0.5 ponto) Indique como obter a solução do sistema linear acima, conhecida a decomposição LU com pivoteamento parcial da matriz A, o vetor das permutações *pivot* e o vetor das constantes b.

d) (0.5 ponto) Indique a sequência de operações que devemos executar no vetor das constantes b para resolver o mesmo sistema usando eliminação de Gauss com pivoteamento parcial.

e) (1.5 pontos) Escreva a expressão da sequência obtida pelo método de Gauss-Jacobi para o sistema acima, organizando de forma que a convergência fique garantida. Verifique. Calcule uma iteração do método de Gauss-Jacobi com vetor inicial $x^{(0)} = (0.25, -1.8, 0.75)^T$ e estime o erro relativo cometido (três casas decimais com arredondamento).

f) (1.5 pontos) Escreva as expressões para a sequência obtida pelo método de Gauss-Seidel para um sistema A com banda 5, cujas diagonais são constantes e iguais a -1, 1, 7, 2, -2 (diagonal mais baixa a diagonal mais alta, sendo a diagonal principal igual a 7). Considere que a matriz A é quadrada e de ordem $n = 20$ e que somente as constantes de cada diagonal são armazenadas em um vetor $diag = [-1, 1, 7, 2, -2]^T$ com cinco posições. Calcule uma iteração para as três primeiras posições do vetor solução, considerando $x^{(0)}$ igual ao vetor nulo e o vetor das constantes $b(i) = i, i = 1, 2, \cdots, 20$.

2ª Questão: a) (2.0 pontos) Escreva as condições necessárias para ajustar, pelo método dos quadrados mínimos, uma curva do tipo $y = \beta_1 + \beta_2 e^x$ a partir dos pontos da tabela abaixo. Obtenha as expressões para os cálculos dos coeficientes do sistema normal e calcule o segundo elemento da diagonal principal.

b) (1.0 ponto) Explique como podemos medir a qualidade do ajuste de um modelo de regressão polinomial, $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_g x^g + \epsilon$, para uma tabela de dados contendo n experimentos que relacionam a variável resposta y com uma variável explicativa x.

x_k	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
y_k	-1.351	-0.282	1.482	4.389	9.182