Lista de Algoritmos Numéricos
Métodos Iterativos de Resolução de Sistemas Lineares
Prof. Andréa Maria Pedrosa Valli

Obs: Utilize pelo menos três casas decimais para resolver os problemas.

1. Obtenha uma solução para o sistema pelo método de Gauss-Seidel com precisão $\epsilon < 10^{-1}$ e $x^{(0)} = (0,0,0)^T$. Organize o sistema de forma a garantir a convergência pelos critérios da linha.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 0.8 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= -1.9 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 &= 2.6 \end{aligned}$$

2. Resolva as questões abaixo:

   (a) Indique qual método iterativo converge, Gauss-Jacobi ou Gauss-Seidel, para o sistema abaixo com $x^{(0)} = (0,0)^T$. A solução exata é $(1,1)^T$.

$$\begin{aligned} -4x_1 + 5x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   (b) Explique como podemos obter uma solução convergente para o sistema abaixo,

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   utilizando um dos métodos iterativos estudados, para $x^{(0)} = (0,0)^T$. Utilizando uma sequência convergente para a solução exata, faça dois passos do método SOR com w = 1 (Gauss-Seidel) e w = 0.3 e $x^{(0)} = (0,0)^T$, calculando o erro relativo cometido em cada passo. Obs: $x_i^{(k+1)} = (1-w)\, x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$

3. Faça dois passos dos métodos de Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel e SOR ($w = 0.7$) usando $x^{(0)}$ igual ao vetor nulo, e calcule o erro relativo cometido em cada passo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 4\,x_1 & - & x_2 & & & - & x_4 & & & & & = & 0 \\ -\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & x_3 & & & - & x_5 & & & = & 5 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & & & & & - & x_6 & = & 0 \\ -\,x_1 & & & & & + & 4\,x_4 & - & x_5 & & & = & 6 \\ & - & x_2 & & & - & x_4 & + & 4\,x_5 & - & x_6 & = & -2 \\ & & & - & x_3 & & & - & x_5 & + & 4\,x_6 & = & 6 \end{array}$$

4. Organize o sistema de uma forma adequada e escreva as expressões do método de Gauss-Seidel. Faça dois passos do método utilizando um vetor nulo como passo inicial, calculando o erro relativo em cada passo. O que podemos concluir sobre a convergência da sequência do método de Gauss-Seidel que você construiu? Explique.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -15 & -4 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{bmatrix}$$

5. Escreva as expressões, para $i = 1, \cdots, 10$, da sequência obtida pelo método de Gauss-Seidel para o sistema

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 7 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 9 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 12 \\ 10 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

e calcule $x_4^{(1)}$ pelo método de Gauss-Seidel com vetor inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0, ..., 0)^T$. Se o sistema fosse resolvido usando o método de Gauss-Jacobi, o que podemos concluir sobre a convergência da sequência gerada por ele, usando o critério das linhas?