

# Equações Diferenciais Ordinárias

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)  
Departamento de Informática  
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

# Equações Diferenciais Ordinárias

- 1 Introdução
- 2 Método de Série de Taylor
- 3 Método de Runge-Kutta
- 4 Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias
- 5 Equações de Ordem Superior

Um **Problema de Valor Inicial** (PVI) de primeira ordem pode ser definido como: encontrar  $y(x)$  para  $x > x_0$  que satisfaça a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)), \quad (1)$$

sujeita às condições de fronteira

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

onde  $f(x, y)$  é uma função conhecida assim como  $x_0$  e  $y_0$ .

Uma **solução** para o PVI é uma função  $y(x)$  da variável independente  $x$  que satisfaz a equação diferencial ordinária (1) e às condições de fronteira (2).

Um **Problema de Valor de Contorno** (PVC) de primeira ordem pode ser definido como: encontrar  $y(x)$  para  $a < x < b$  que satisfaça a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x)) \quad (3)$$

sujeita às condições de contorno

$$y(a) = y_a \quad (4)$$

$$y(b) = y_b \quad (5)$$

onde  $f(x, y)$  é uma função conhecida assim como  $a$ ,  $b$ ,  $y_a$  e  $y_b$ .

Uma **solução** para o PVC é uma função  $y(x)$  da variável independente  $x$  que satisfaz a equação diferencial ordinária (3) e às condições de contorno (4) e (5).

Alguns métodos de **Solução Numérica** para PVI e PVC:

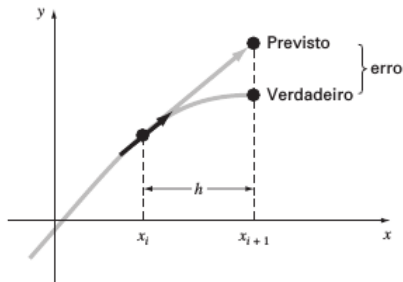
- Métodos de **Passo Simples** (Runge-Kutta) e Passo Múltiplo
- Método de **Diferenças Finitas**, Elementos Finitos, Volumes Finitos, Elementos de Contorno.

O objetivo dos métodos de **passo simples** é encontrar uma solução aproximada  $y_{i+1} \approx y(x_{i+1})$ , dada a solução no instante anterior  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Para isso, precisamos definir uma **malha** de pontos em  $x$ . Aqui usaremos uma malha de pontos igualmente espaçados,  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , a uma distância  $h = \frac{x_n - x_0}{n}$ ,

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Os métodos fornecem a solução em uma tabela de pontos  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Através da interpolação podemos traçar o gráfico da solução.

Método de Euler [2]:  $y(x_{i+1}) \approx y_{i+1}$ 

Considere a reta  $R(x)$  tangente à curva  $y(x)$  no ponto  $(x_i, y_i)$ . O valor **Previsto**,  $y_{i+1}$ , é definido como sendo o valor  $R(x_{i+1})$ , ou seja, o valor da reta tangente no ponto  $x_{i+1}$ . Reta  $R(x)$ :

$$\frac{R(x) - y_i}{x - x_i} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(x_i, y_i)} = f(x_i, y_i) \Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

Exemplo: resolva o PVI no intervalo  $[0, 1]$  usando o método de Euler com  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$ . Calcule o erro exato para cada  $h$ , sabendo-se que a solução exata é  $y(x) = e^x$ .

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$
$$y(0) = 1$$

Série de Taylor de  $y(x)$  em torno de  $x_i$ :

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \dots \\ + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}(x - x_i)^n + R_n$$

onde  $R_n$  é o **resto** dado por

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_i)^{n+1}$$

com  $\xi_x$  um ponto entre  $x_i$  e  $x$ .



Vamos aproximar  $y(x)$  em torno do ponto  $x_i$  por uma **reta** usando a **série de Taylor**:

$$y(x) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i)$$

$$E_1 = \frac{y''(\xi_x)}{2!} (x - x_i)^2, \quad \xi_x \text{ entre } x \text{ e } x_i$$

Definindo uma malha de pontos em  $x$  igualmente espaçados, podemos obter uma aproximação para a solução  $y(x)$  em  $x_{i+1} = x_i + h$ , da seguinte forma:

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$E_1 = \frac{y''(\xi_x)}{2!} h^2, \quad \xi_x \text{ entre } x \text{ e } x_i \quad (\text{erro local})$$

assumindo  $h$  pequeno. Quanto maior  $h$  maior é o erro local. Dizemos que o erro local é  $\mathcal{O}(h^2) \approx Ch^2$ , onde  $C$  é uma constante que depende do valor da derivada segunda de  $y(x)$  em  $\xi_x$ . é possível verificar numericamente que o **erro global** é  $\mathcal{O}(h)$ .

Vamos aproximar  $y(x)$  em torno do ponto  $x_i$  por um **polinômio de grau 2**, usando a **série de Taylor**:

$$y(x) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2$$
$$E_2 = \frac{y^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_i)^3, \quad \xi_x \text{ entre } x \text{ e } x_i$$

Precisamos calcular  $y''(x)$ :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(f(x, y(x))) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = f_x(x, y) + f(x, y) f_y(x, y)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} (f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) f_y(x_i, y_i))$$

$$E_2 = \frac{y^{(3)}(\xi_x)}{3!} h^3 = \mathcal{O}(h^3), \quad \xi_x \text{ entre } x \text{ e } x_i$$

**Dificuldade:** cálculo de derivadas de  $f(x, y)$



Propriedades:

- 1 os métodos de Runge-Kutta são de passo um;
- 2 não exigem o cálculo de qualquer derivada de  $f(x, y)$ ;
- 3 coincidem com o método de série de Taylor de mesma ordem.

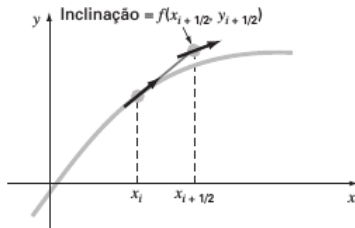
Observação: o método de Euler é um método de Runge-Kutta de primeira ordem,

$$\begin{aligned}y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ &= y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i)\end{aligned}$$

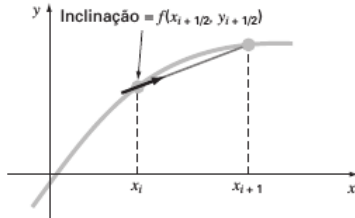
$$\text{Erro Local} = \frac{y''(\xi_x)}{2!} h^2 = \mathcal{O}(h^2), \quad \xi_x \text{ entre } x \text{ e } x_i$$

$$\text{Erro Global} = \mathcal{O}(h)$$

## Método do Ponto Médio ou Euler Modificado [2]:



(a)



(b)

Método do **Ponto Médio** ou **Euler Modificado** [2]:

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{1}{2}h$$
$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{1}{2}h f(x_i, y_i) \quad (\text{método de Euler})$$

Reta  $R(x)$  que passa por  $(x_i, y_i)$  e tem inclinação  $f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$ :

$$\frac{R(x) - y_i}{x - x_i} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}) \Rightarrow y_{i+1} = R(x_{i+1})$$
$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$$
$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h f(x_i, y_i)\right)$$

Método do Ponto Médio ou Euler Modificado:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_{i+1} &= y_i + h k_2 \\ k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}h k_1\right)\end{aligned}$$

Observação: temos que avaliar a função  $f(x, y)$  em dois pontos diferentes em cada passo do método. Vamos verificar que este é um método de **Runge-Kutta de ordem 2**.

Método de **Runge-Kutta de ordem s**:

$$y_{i+1} = y_i + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \dots + b_s k_s)$$

onde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + c_2 h, y_i + h a_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + c_3 h, y_i + h[a_{31} k_1 + a_{32} k_2])$$

⋮

$$k_s = f(x_i + c_s h, y_i + h[a_{s1} k_1 + a_{s2} k_2 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}])$$

**Erro Local:**  $\mathcal{O}(h^{s+1})$  ( $E_s = \frac{y^{(s+1)}(\xi_x)}{(s+1)!} h^{s+1}$ ,  $\xi_x$  entre  $x$  e  $x_i$ )

**Erro Global:**  $\mathcal{O}(h^s)$



## Notação de Butcher:

0					
$c_2$	$a_{21}$				
$c_3$	$a_{31}$	$a_{32}$			
$\vdots$	$\vdots$				
$c_s$	$a_{s1}$	$a_{s2}$	$\cdots$	$a_{s,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{s-1}$	$b_s$

$\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  definidas para cada método.

**Exemplo:** Método do Ponto Médio ou Euler Modificado:

$c_2 = 1/2$ ,  $a_{21} = 1/2$ ,  $b_1 = 0$  e  $b_2 = 1$ .

0			
1/2	1/2		
		0	1



Método de Euler Melhorado (Runge-Kutta de ordem 2):

$$c_2 = 1, a_{21} = 1, b_1 = 1/2 \text{ e } b_2 = 1/2$$

0				
1			1	
-----				1/2 1/2

Runge-Kutta de ordem 4:

$$c_2 = 1/2, c_3 = 1/2, c_4 = 1$$

$$a_{21} = 1/2, a_{31} = 0, a_{32} = 1/2, a_{41} = a_{42} = 0, a_{43} = 1$$

$$b_1 = 1/6, b_2 = b_3 = 1/3, b_4 = 1/6$$

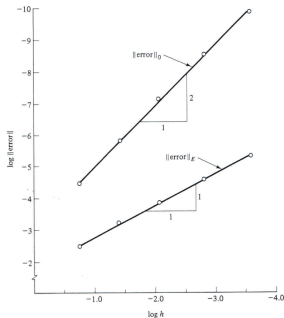
0									
1/2					1/2				
1/2					0	1/2			
1					0	0	1		
-----									1/6 1/3 1/3 1/6

Verificar numericamente a **ordem de convergência** dos métodos  $p$ :

$$\| \text{erro}(h) \| \leq Ch^p$$

$$\Rightarrow \log(\| \text{erro}(h) \|) \approx p \log(h) + \log(C)$$

Ou seja, o gráfico de uma função real  $\text{erro}(h)$  da forma  $Ch^p$  é uma reta com inclinação  $p$  em um gráfico  $\log - \log$ :  $\| \text{erro} \|_0 \leq h^2$  e  $\| \text{erro} \|_E \leq h^1$ , na figura abaixo.



Método de **Série de Taylor** de ordem 2:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} [f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i)] + \dots \quad (6)$$

Método de **Runge-Kutta** de ordem 2:

$$y_{i+1} = y_i + h [b_1 f(x_i, y_i) + b_2 f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i))] \quad (7)$$

Expandindo  $f(x, y)$  em série de Taylor em torno de  $(x_i, y_i)$

$$f(x_i + c_2 h, y_i + a_{21} h f(x_i, y_i)) \approx f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \dots \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), temos

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 f_i + hb_2 \left[ f_i + c_2 h \frac{\partial f_i}{\partial x} + a_{21} h f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \dots \right]$$



$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h(b_1 + b_2)f_i + \frac{h^2}{2} \left[ 2b_2c_2 \frac{\partial f_i}{\partial x} + 2b_2a_{21}f_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \dots \right]$$

Comparando a equação com a série de Taylor de ordem 2,

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} [ f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i)f_y(x_i, y_i) ] + \dots$$

temos

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$2 b_2 c_2 = 1$$

$$2 b_2 a_{21} = 1$$

**Observação:** Temos 4 incógnicas e 3 equações

$\Rightarrow$  infinitas soluções

$\Rightarrow$  temos vários métodos de Runge-Kutta de ordem 2

## Sistema de Eq. Dif. Ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ \frac{dy_m}{dx} &= f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}$$

sujeita às condições iniciais

$$\begin{aligned}y_1(x_0) &= y_{01} \\ y_2(x_0) &= y_{02} \\ &\vdots \\ y_m(x_0) &= y_{0m}\end{aligned}$$

## Forma Vetorial:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dx}(x) &= F(x, Y(x)) \\ Y(x_0) &= Y_0\end{aligned}$$

onde

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_m(x) \end{bmatrix}, \quad F(x, Y(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, Y(x)) \\ f_2(x, Y(x)) \\ \vdots \\ f_m(x, Y(x)) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ \vdots \\ y_{0m} \end{bmatrix}$$

## Método de Euler:

$$Y_{n+1} = Y_n + h F(x_n, Y_n)$$

Equações Diferenciais Ordinárias de ordem superior:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - 5x \frac{dy}{dx} + xy^2 &= 0 \\ y(1) &= 2 \\ \frac{dy}{dx}(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dx} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ 5xy_2 - xy_1^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Método de Euler:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_n + h \begin{bmatrix} y_2 \\ 5xy_2 - xy_1^2 \end{bmatrix}_n$$

## Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.