# O Método de Diferenças Finitas

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

# O Método de Diferenças Finitas

1. Potencial Elétrico em Regime Estacionário
2. Discretização por Diferenças Finitas
3. Cálculo do Potencial em 1D e 2D
4. Aplicação

O cálculo do potencial elétrico $V$ e do campo elétrico $\vec{E}$ satisfazem, respectivamente, as equações:

$$\nabla.(-\nabla V) = f \tag{1}$$

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{2}$$

onde $f$ é uma distribuição de cargas conhecida. Sendo assim, o potencial elétrico $V(x,y)$ satisfaz a seguinte equação de Poisson em duas dimensões:

$$-\Delta V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) = f(x,y) \tag{3}$$

Para resolver a equação de Poisson em uma região $\Omega$ é preciso definir condições de contorno. Vamos considerar condições de contorno do tipo Dirichlet ($V = V_f$ em $\partial\Omega_1$) e Neumann ($\frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0$ em $\partial\Omega_2$).

O potencial elétrico $V$ satisfaz a equação de Poisson sujeita a condições de contorno:

$$-\Delta V = f \quad \text{no domínio}\,\Omega \tag{4}$$

$$V = V_f \quad \text{na fronteira}\,\partial\Omega_1 \tag{5}$$

$$\nabla V.\mathbf{n} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na fronteira}\,\partial\Omega_2 \tag{6}$$

Desejamos obter potencial elétrico $V$ e campo elétrico $\vec{E}$ no interior de um domínio $\Omega$ pelo método das diferenças finitas.

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


Série de Taylor de $u(x)$ em torno do ponto $x$:

$$u(x+h) = u(x) + h\,u'(x) + \frac{h^2}{2!}\,u''(x) + \frac{h^3}{3!}u^3(x) + \frac{h^4}{4!}u^4(x) + \cdots \quad (7)$$

$$u(x-h) = u(x) - h\,u'(x) + \frac{h^2}{2!}\,u''(x) - \frac{h^3}{3!}u^3(x) + \frac{h^4}{4!}u^4(x) + \cdots \quad (8)$$

Aproximações para $u'(x)$ por diferenças finitas:

- (7) $\Rightarrow$ $u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \mathcal{O}(h)$ (adiantada)
- (8) $\Rightarrow$ $u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h)$ (atrasada)
- (7) $-$ (8) $\Rightarrow$ $u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$ (central)

Aproximação para $u''(x)$ por diferenças finitas:

(7) + (8) $\Rightarrow$ $$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$ (central)

Equação do potencial para $x \in \Omega = (0, L)$

$$
\begin{aligned}
-\frac{d^2V}{dx^2} &= f \qquad \text{em } \Omega && (9)\\
V &= g \qquad \text{em } \partial\Omega && (10)
\end{aligned}
$$

Discretização por diferenças finitas centrais no ponto $x_i$

$$
-\frac{V(x_i + h) - 2V(x_i) + V(x_i - h)}{h^2} = f(x_i)
$$

onde $h = \frac{L}{n+1}$ é o número de subintervalos em $[0, L]$. Sendo assim, temos $(n+2)$ pontos no domínio $[0, L]$, $x_i = x_0 + i\,h$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

$$
-\frac{V_{i+1} - 2V_i + V_{i-1}}{h^2} = f_i \quad \rightarrow \quad aV_{i+1} + bV_i + cV_{i-1} = \bar{f}_i
$$

onde $a = c = -1$, $b = 2$ e $\bar{f}_i = h^2 f_i$.

Equação de Poisson para $(x, y) \in \Omega = (0, L) \times (0, H)$

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) &= f(x, y) \qquad \text{em } \Omega \qquad (11) \\
V(x, y) &= g(x, y) \qquad \text{em } \partial\Omega \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Discretização por diferenças finitas centrais no ponto $(x_i, y_j)$

$$
\frac{V(x_i + h_x, y_j) - 2V(x_i, y_j) + V(x_i - h_x, y_j)}{h_x^2} + \frac{V(x_i, y_j + h_y) - 2V(x_i, y_j) + V(x_i, y_j - h_y)}{h_y^2} = -f(x_i, y_j)
$$

onde $h_x = \frac{L}{nx+1}$, $h_y = \frac{H}{ny+1}$, $(nx + 1)$ é o número de subintervalos em $[0, L]$ e $(ny + 1)$ é o número de subintervalos em $[0, H]$. Sendo assim, temos $(nx + 2) \times (ny + 2)$ pontos no domínio $[0, L] \times [0, H]$,

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_0 + i\, h_x, \quad i = 1, 2, \cdots, nx \\
y_j &= y_0 + j\, h_y, \quad j = 1, 2, \cdots, ny
\end{aligned}
$$

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


Notação:

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V(x_i, y_j), \quad f_{ij} = f(x_i, y_j) = f(ih_x, jh_y) \\ V_{i-1,j+1} &= V(x_i - h_x, y_j + h_y) \end{aligned}$$

A discretização da equação de Poisson por diferenças finitas centrais para $i = 1, 2, \cdots, nx$, $j = 1, 2, \cdots, ny$ pode ser escrita da forma

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{ij} + V_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{ij} + V_{i,j-1}}{h_y^2} = -f_{ij}$$

$$\Rightarrow a\, V_{i+1,j} + bV_{i-1,j} + c\, V_{i,j+1} + d\, V_{i,j-1} + e\, V_{ij} = \bar{f}_{ij}$$

onde

$$a = b = h_y^2, \quad c = d = h_x^2 \quad e = -2(h_x^2 + h_y^2), \quad \bar{f}_{ij} = -h_x^2 h_y^2\, f_{ij}$$

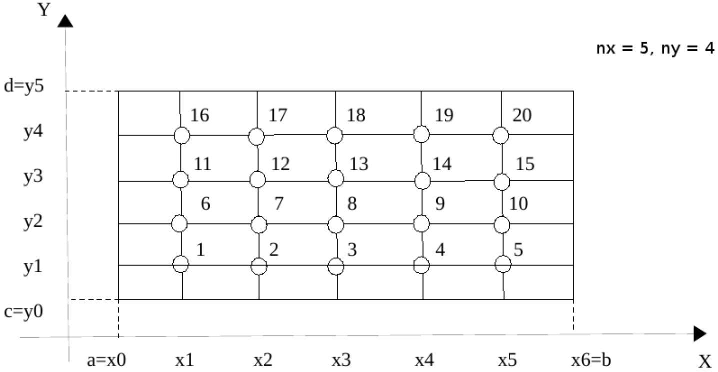
Cálculo do campo elétrico:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left( \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\, h_x}, \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\, h_y} \right)^T$$

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


Malha de diferenças finitas considerando apenas condições de fronteira do tipo Dirichlet:

$$a\,V_{i+1,j} + bV_{i-1,j} + c\,V_{i,j+1} + d\,V_{i,j-1} + e\,V_{ij} = \bar{f}_{ij}$$
$$a\,V_{p+1} + bV_{p-1} + c\,V_{p+nx} + d\,V_{p-nx} + e\,V_{p} = \bar{f}_{p},$$
$$p = 1, 2, \cdots, nx\,ny$$



Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


$$a\,V_{p+1} + bV_{p-1} + c\,V_{p+nx} + d\,V_{p-nx} + e\,V_p = \bar{f}_p$$

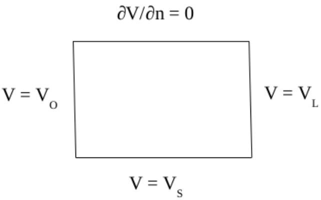
$$\text{onde} \quad p = 1, 2, \cdots, 20$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc|ccccc}
e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b & e & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
d & 0 & 0 & 0 & 0 & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 & 0 & c \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & 0 & e & a & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e & a \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & b & e
\end{array}\right]_{20 \times 20}$$

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


## Tratamento das Condições de Contorno do tipo Dirichlet:

$$a\, V_{p+1} + bV_{p-1} + c\, V_{p+nx} + d\, V_{p-nx} + e\, V_p = \bar{f}_p$$

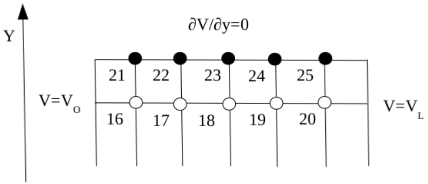



$$\begin{array}{lll}
p = 1 & eV_1 + aV_2 + cV_6 & = \bar{f}_1 - dV_S - bV_O \\
p = 2 & bV_1 + eV_2 + aV_3 + cV_7 & = \bar{f}_2 - dV_S \\
p = 3 & eV_2 + bV_1 + aV_3 + cV_8 & = \bar{f}_3 - dV_S \\
p = 4 & eV_2 + bV_1 + aV_3 + cV_9 & = \bar{f}_4 - dV_S \\
p = 5 & bV_4 + eV_5 + cV_{10} & = \bar{f}_5 - dV_S - aV_L \\
p = 6 & dV_1 + eV_6 + aV_7 + cV_{11} & = \bar{f}_6 - bV_S \\
p = 7 & dV_2 + bV_6 + eV_7 + aV_8 + cV_{12} & = \bar{f}_7 \\
p = 8 & dV_3 + bV_7 + eV_8 + aV_9 + cV_{13} & = \bar{f}_8 \\
p = 9 & dV_4 + bV_8 + eV_9 + aV_{10} + cV_{14} & = \bar{f}_9 \\
p = 10 & dV_5 + bV_9 + eV_{10} + cV_{15} & = \bar{f}_{10} - aV_L \\
\ldots & &
\end{array}$$

Tratamento das Condições de Contorno do tipo Neumann:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2h_y} = 0, \quad \Rightarrow V_{i,j+1} = V_{i,j-1}$$

$$a\, V_{p+1} + bV_{p-1} + c\, V_{p+nx} + d\, V_{p-nx} + e\, V_p = \bar{f}_p$$




| | | |
|---|---|---|
| $p = 21$ | $aV_{22} + (c+d)V_{16} + eV_{21}$ | $= \bar{f}_{21} - bV_O$ |
| $p = 22$ | $aV_{23} + bV_{21} + (c+d)V_{17} + eV_{22}$ | $= \bar{f}_{22}$ |
| $p = 23$ | $aV_{24} + bV_{22} + (c+d)V_{18} + eV_{23}$ | $= \bar{f}_{23}$ |
| $p = 24$ | $aV_{25} + bV_{23} + (c+d)V_{19} + eV_{24}$ | $= \bar{f}_{24}$ |
| $p = 25$ | $bV_{24} + (c+d)V_{20} + eV_{25}$ | $= \bar{f}_{25} - aV_L$ |

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


## Telecomunicações: linhas de transmissão de microfitas [3]

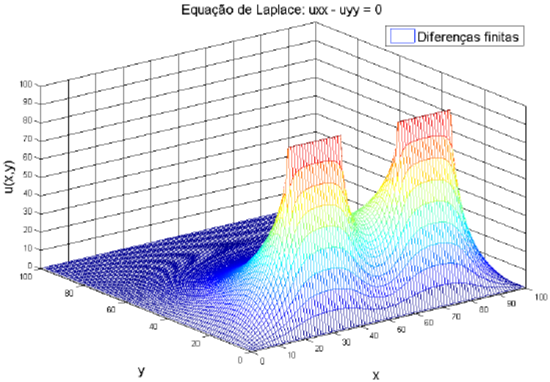



Figura: Distribuição tridimensional do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


# Telecomunicações: linhas de transmissão de microfitas [3]

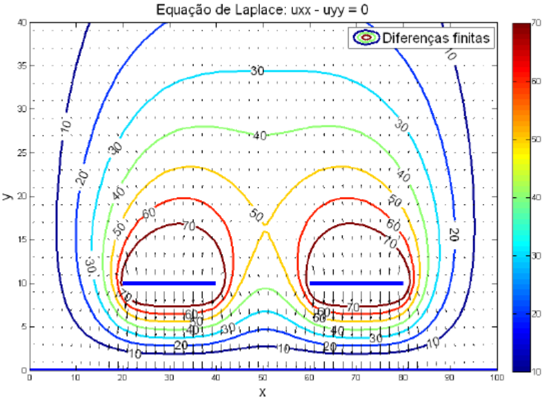



Figura: Linhas equipotenciais e distribuição do campo elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

Cálculo do Potencial Elétrico em Regime Estacionário


## Telecomunicações: linhas de transmissão de microfitas [3]

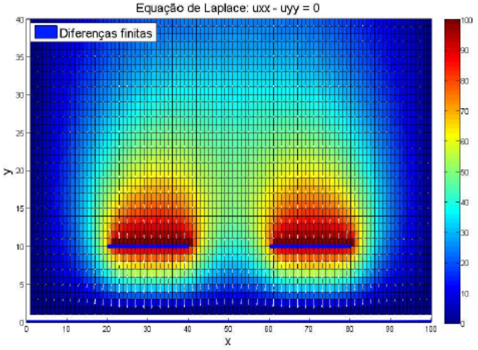



Figura: Distribuição do campo elétrico e do potencial elétrico para uma permissividade elétrica do substrato igual ao do meio.

## Bibliografia

1. Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

2. Computacional Modeling with Methods and Analysis, White, R.E., 2003.

3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS PARA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON PARA LINHAS DE MICROFITAS ACOPLADAS, Rayann Pablo de Alencar AZEVEDO; Ícaro Bezerra de Queiroz ARAÚJO; Eliel Poggi dos SANTOS; Paulo Henrique da FONSECA SILVA.