Sistemas Mal Condicionados

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

1. Teorema de Existência e Unicidade de Soluções
2. Sistemas Mal Condicionados

Definição: O posto de uma matriz A é o número de linhas não-nulas quando a mesma está escrita na forma reduzida escalonada por linhas ou, equivalentemente, o número de linhas ou colunas linearmente independentes de A - visto que este número é demonstradamente o mesmo, seja para colunas, seja para linhas.

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções

O sistema $Ax = b$ de ordem n tem solução
$\Longleftrightarrow \text{posto}([A]) = \text{posto}([A|b])$

A solução é única
$\Longleftrightarrow \text{posto}([A]) = n \Longleftrightarrow \det([A]) \neq 0$

Se $\text{posto}([A]) < n$ então o sistema tem infinitas soluções

Sistemas mal condicionados são aqueles onde pequenas modificações nos coeficientes ou constantes do sistemas resultam em grandes modificações na solução. Uma outra interpretação é que uma grande quantidade de respostas pode aproximadamente satisfazer as equações.

Exemplo 1: solução exata $= (4, 3)^T$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

Exemplo 2: solução exata $= (8, 1)^T$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

Observação:

- A maioria dos sistemas derivados de problemas de engenharia são naturalmente bem condicionados.
- Resíduo pequeno pode não representar uma boa aproximação para a solução. Exemplo 2: solução exata $= (8, 1)^T$. O resíduo para $\hat{x} = (4, 3)^T$, $r = b - A\hat{x} = (0, 0.2)^T$ parece pequeno, mas a solução está muito longe da solução exata.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

- O determinante também não é um bom indicador do mal condicionamento de um sistema. Exemplo 1: solução exata $=$ $(4, 3)^T$. O determinante é -20, ou seja, em valor absoluto, bem maior que zero. No entanto, o sistema é mal condicionado.

$$\begin{aligned} 10x_1 + 20x_2 &= 100 \\ 11x_1 + 20x_2 &= 104 \end{aligned}$$

Observação: Um bom indicador para o mal condicionamento de um sistema, $Ax = b$, é o número de condição da matriz A, ou seja,

$$\text{cond}(A) = ||A||\,||A^{-1}||$$

onde $||A||$ é alguma medida da matriz A, denominada norma da matriz A. Vamos analisar a influência que pertubações dos dados de entrada, $\delta A = \tilde{A} - A$, podem provocar na solução do sistema. Seja $\tilde{A}\bar{x} = b$.

$$\begin{aligned}
& x = A^{-1}b = A^{-1}(\tilde{A}\bar{x}) = A^{-1}(A + \tilde{A} - A)\,\bar{x} \\
& \to x = \bar{x} + A^{-1}(\tilde{A} - A)\,\bar{x} \\
& \to x - \bar{x} = A^{-1}\delta A\,\bar{x} \\
& \to ||x - \bar{x}|| \leq ||A||||A^{-1}||\frac{||\delta A||}{||A||}||\bar{x}|| \\
& \to \frac{||x - \bar{x}||}{||x||} \leq cond(A)\frac{||\delta A||}{||A||}
\end{aligned}$$

Observação:

- cond(A) fornece uma delimitação para o erro relativo da solução, em termos do erro relativo dos dados de entrada.
- Se cond(A) é grande então o limitante do erro relativo será grande. Desta forma, dificilmente conseguiremos bons resultados.

Regra Prática: Para uma calculadora de p dígitos e $\text{cond}(A) = 10^q$, a solução pode ter apenas $p - q$ dígitos confiáveis. Ex: matriz de Hilbert $H_{ij} = 1/(i + j - 1), i, j = 1, 2, \cdots, n$. Para $n = 10$, $\text{cond}(A) \cong 1.6 \times 10^{13}$.