Sistemas Lineares - Decomposição LU

Andréa Maria Pedrosa Valli

Laboratório de Computação de Alto Desempenho (LCAD)
Departamento de Informática
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, Vitória, ES, Brasil

Decomposição LU

- Fatoração LU da matriz A permutada:

$$\Rightarrow PA = LU$$

onde

P é uma matriz de permutação de linhas

L é uma matriz triangular inferior unitária $(l_{ii} = 1, \forall i)$

U é uma matriz triangular superior

Exemplo 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - (4/8)L_1 \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = LU$$

- Processo de Substituição:

$$A\,x = b \longrightarrow P\,A\,x = P\,b \longrightarrow L\,U\,x = Pb$$

$$U\,x = y, \quad \text{então} \quad L\,y = Pb$$

1. $L\,y\ = P\,b$, Substituição Progressiva e determino y;
2. $U\,x\ = y$, Substituição Regressiva e determino a solução x.

Exemplo 2×2: $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix}$, solução exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4/8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo do determinante: $PA = LU \longrightarrow det(PA) = det(LU)$, então, pela propriedade de determinantes,

$$det(A) = \frac{det(L)det(U)}{det(P)},$$

onde

$$\begin{aligned} det(L) &= 1 \\ det(U) &= \prod_{i=1}^{n} u_{ii} \quad \text{(produto dos pivôs)} \\ det(P) &= (-1)^t \quad \text{onde } t \text{ é o número de permutações} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^{n} u_{ii}$$

- Cálculo da inversa: $[A]\,[A]^{-1} = [A]^{-1}\,[A] = [I]$

Exemplo 3×3: $[A]\,[A]^{-1} = [I] =$ matriz identidade

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Fatoração LU de A: $PA = LU$
2. Resolve $L\,U\,\vec{x}_j = P\,I_j$, $j = 1, 2, 3$, onde

$$\vec{x}_j = \begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ x_{3j} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_j = \text{j-ésima coluna de}\,[I]$$

- Estudo da deformação de uma viga em balanço carregada por uma força F.

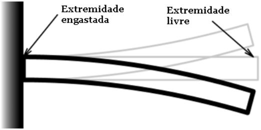

Figura: Viga em balanço (autor:Lechatjaune)

O problema discretizado por um método de aproximação produz um sistema de equações lineares do tipo $A\,x = b$, onde b depende do valor da força F aplicada. No estudo da deformação temos que resolver n sistemas do tipo $A\,x = b_i$ para $i = 1, \cdots, n$. Solução:

1. Fatoração LU de A: $PA = LU$
2. Resolve $L\,U\,x = P\,b_i$, $i = 1, \cdots, n$

$$\text{Exemplo } 3\times 3:\ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - (3/5)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1/5)L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix} L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (-7/16)L_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -7/16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} = P\,A$$

- $L_1 \longleftrightarrow L_2$: $P_1\, A = A_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

- $L_2 \leftarrow L_2 - (3/5)L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - (1/5)L_1$: $M_1\, A_1 = A_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix}$$

- $L_2 \longleftrightarrow L_3$: $P_2\, A_2 = A_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix}$$

- $L_3 \leftarrow L_3 - (-7/16)L_2 : M_2\, A_3 = U$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7/16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 7/5 & -18/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -16/5 & 19/5 \\ 0 & 0 & -31/16 \end{bmatrix}$$

Cálculo de P e L:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow M_2\, P_2\, M_1\, P_1\, A = U \\ &\Rightarrow M_2\, P_2\, M_1\, ((P_2)^{-1} P_2) P_1\, A = U \\ &\Rightarrow (M_2\, P_2\, M_1\, (P_2)^{-1})(P_2\, P_1)\, A = U \\ &\Rightarrow (P_2 P_1)\, A = (M_2\, P_2\, M_1\, (P_2)^{-1})^{-1}\, U \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ P &= P_2\, P_1 \\ \Rightarrow\ L &= (M_2\, P_2\, M_1\, (P_2)^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

1. $(P_2)^{-1} = P_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $(M_1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/5 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ onde $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\tilde{M}_1 = P_2\, M_1\, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/5 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $L = (M_2\, P_2\, M_1\, P_2)^{-1} = (M_2\, \tilde{M}_1)^{-1} = (\tilde{M}_1)^{-1}\, (M_2)^{-1}$

Fatores P e L:

- $P = P_2\, P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- $L = (\tilde{M}_1)^{-1}\, (M_2)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7/16 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 3/5 & -7/16 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3×3: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, sol. exata $= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolver pelo método de decomposição LU com três casas decimais.

1) Fatoração LU:

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (0.6)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (0.2)L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.6 & 1.4 & -3.6 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \longleftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & 1.4 & -3.6 \end{bmatrix} \Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - (-0.438)L_2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & -0.438 & -1.938 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0.2 & -3.2 & 3.8 \\ 0.6 & -0.438 & -1.938 \end{bmatrix}$$

Cálculo do vetor de permutação:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \; L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \; L_2 \longleftrightarrow L_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Processo de Substituição: $P\,A\,x = P\,b \longrightarrow L\,U\,x = P\,b$

1) $L\,y = P\,b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.6 & -0.438 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b[\,p[1]\,] \\ b[\,p[2]\,] \\ b[\,p[3]\,] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b[2] \\ b[3] \\ b[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.6 \\ -1.937 \end{bmatrix}$$

2) $U\,x = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & -3.2 & 3.8 \\ 0 & 0 & -1.938 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0.6 \\ -1.937 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{bmatrix}$$

Cálculo do resíduo: $r = b - A\tilde{x}$, onde $\tilde{x}$ é a solução aproximada.

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.999 \\ 0.999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.001 \\ 0.002 \\ 0.001 \end{bmatrix}$$

Exemplo: sistema 4×4

$$\begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \text{sol. exata} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primeiro Passo: Escolher o pivô (a_{11}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da primeira coluna abaixo da diagonal

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - (-3/7)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (-2/7)L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (1/7)L_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix}$$

Segundo Passo: Escolher o pivô (a_{22}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da segunda coluna abaixo da diagonal

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 2.714 & 1.571 & 6.857 \\ 0.143 & -1.857 & 5.714 & 1.571 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - (2.714/7.571)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - (-1.857/7.571)L_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \end{bmatrix}$$

Terceiro Passo: Escolher o pivô (a_{33}), trocar linhas e eliminar os coeficientes da terceira coluna abaixo da diagonal

$$L_3 \longleftrightarrow L_4 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 1.981 & 5.321 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$L_4 \leftarrow L_4 - (1.981/5.434)L_3 \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 4.365 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ -0.429 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0.143 & -0.245 & 5.434 & 2.623 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 4.365 \end{bmatrix}$$

Cálculo do vetor de permutação:

$$p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} L_3 \longleftrightarrow L_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P\,b = \begin{bmatrix} b[2] \\ b[1] \\ b[4] \\ b[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Processo de Substituição: $P\,A\,x = P\,b \longrightarrow L\,U\,x = P\,b$

1) $L\,y = P\,b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.429 & 1 & 0 & 0 \\ 0.143 & -0.245 & 1 & 0 \\ -0.286 & 0.358 & 0.365 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.000 \\ 10.719 \\ 8.053 \\ 4.369 \end{bmatrix}$$

2) $U\,x = y$

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7.571 & -1.143 & 4.286 \\ 0 & 0 & 5.434 & 2.623 \\ 0 & 0 & 0 & 4.365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.000 \\ 10.719 \\ 8.053 \\ 4.369 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.001 \end{bmatrix}$$

Cálculo do Resíduo: $R = b - Ax$

$$R = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 8 & -2 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 0.999 \\ 1.001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.005 \\ -0.001 \\ -0.005 \\ 0.004 \end{bmatrix}$$

Observação: Na fatoração LU, como na eliminação de Gauss, todos os multiplicadores são em módulo menores ou iguais a 1 por causa do pivoteamento parcial. Além disso, a solução obtida é exata a menos dos erros de ponto flutuante, ou seja, o resíduo é bem pequeno e da ordem dos número de casas decimais utilizada nos cálculos.

Pseudocódigo para a implementação da decomposição LU [2]:

```
SUB Ludecomp (a, b, n, tol, x, er)
  DIM o_n, s_n
  er = 0
  CALL Decompose(a, n, tol, o, s, er)
  IF er <> -1 THEN
    CALL Substitute(a, o, n, b, x)
  END IF
END Ludecomp

SUB Decompose (a, n, tol, o, s, er)
  DOFOR i = 1, n
    o_i = i
    s_i = ABS(a_i,1)
    DOFOR j = 2, n
      IF ABS(a_i,j)>s_i THEN s_i = ABS(a_i,j)
    END DO
  END DO
  DOFOR k = 1, n - 1
    CALL Pivot(a, o, s, n, k)
    IF ABS(a_o(k),k/s_o(k)) < tol THEN
      er = -1
      PRINT a_o(k),k/s_o(k)
      EXIT DO
    END IF
    DOFOR i = k + 1, n
      fator = a_o(i),k/a_o(k),k
      a_o(i),k = fator
      DOFOR j = k + 1, n
        a_o(i),j = a_o(i),j - factor * a_o(k),j
      END DO
    END DO
  END DO
  IF ABS(a_o(k),k/s_o(k)) < tol THEN
    er = -1
    PRINT a_o(k),k/s_o(k)
  END IF
END Decompose

SUB Pivot (a, o, s, n, k)
  p = k
  maior = ABS(a_o(k),k/s_o(k))
  DOFOR ii = k + 1, n
    dummy = ABS(a_o(ii),k/s_o(ii))
    IF dummy > maior THEN
      maior = dummy
      p = ii
    END IF
  END DO
  dummy = o_p
  o_p = o_k
  o_k = dummy
END Pivot

SUB Substitute (a, o, n, b, x)
  DOFOR i = 2, n
    soma = b_o(i)
    DOFOR j = 1, i - 1
      soma = soma - a_o(i),j * b_o(j)
    END DO
    b_o(i) = soma
  END DO
  x_n = b_o(n)/a_o(n),n
  DOFOR i = n - 1, 1, -1
    soma = 0
    DOFOR j = i + 1, n
      soma = soma + a_o(i),j * x_j
    END DO
    x_i = (b_o(i) - soma)/a_o(i),i
  END DO
END Substitute
```

FIGURA 10.2

Bibliografia Básica

[1] Algoritmos Numéricos, Frederico F. Campos, Filho - 2ª Ed., Rio de Janeiro, LTC, 2007.

[2] Métodos Numéricos para Engenharia, Steven C. Chapa e Raymond P. Canale, Ed. McGraw-Hill, 5ª Ed., 2008.

[3] Cálculo Numérico - Aspectos Teóricos e Computacionais, Márcia A. G. Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes, Ed. Pearson Education, 2ª Ed., 1996.