Primeiro Trabalho Computacional
Algoritmos Numéricos I - 17/1
Parte 2 - Método de Diferenças Finitas

Considerações gerais: O trabalho poder ser feito em grupo de no máximo dois alunos. Todos os trabalhos devem ser enviados por email (com o assunto trab1-part2 e o nome dos componentes do grupo), incluindo o relatório e os arquivos em C do seu código. Não envie os executáveis.

Data da entrega: 12 de julho de 2017.

1 Objetivos do Trabalho

- Resolver a equação de Poisson pelo método de diferenças finitas centrais, resolvendo o sistema resultante pelo método SOR.
- Testar o código com um problema com solução manufaturada, envolvendo condições de fronteira do tipo Dirichlet.
- Resolver uma aplicação em eletromagnetismo.
- Escrever o relatório técnico com a descrição do trabalho e os resultados obtidos, fazendo os gráficos das soluções usando gnuplot, octave, tecplot, paraview ou outro software disponível.

2 Descrição do Trabalho

Nesse trabalho vamos estudar o processo de discretização pelo método das diferenças finitas da equação de Poisson:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x,y) \qquad \text{em} \;\; \Omega \tag{1}$$

satisfazendo condições de contorno do tipo Dirichlet

$$V \;\; = \;\; g(x,y) \qquad \text{em} \qquad \partial\Omega$$

considerando $f(x,y)$ e $g(x,y)$ conhecidas. Deseja-se obter a solução $V(x,y)$ no interior de $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, considerando uma subdivisão do domínio em células retangulares, sendo $N_x + 1$ divisões na horizontal e $N_y + 1$ divisões na vertical, respectivamente, de dimensões $h_x = 1/(N_x + 1)$ e $h_y = 1/(N_y + 1)$.

3 Etapas do trabalho

3.1 Implementação

Faça um programa computacional modularizado para resolver a equação bidimensional (1) pelo método das diferenças finitas centrais. Algumas sugestões de funções para modularizar o seu código:

- Um procedimento para leitura dos dados (pode ser feita através de um arquivo de entrada): N_x, N_y, $[a,b] \times [c,d]$, parâmetro do SOR (w), tolerância ($etol$) e um número máximo de iterações ($Niter_{max}$).
- Funções para os cálculos de $f(x,y)$ e $g(x,y)$.
- Um procedimento que determina a solução da equação de Poisson por diferenças finitas utilizando o método SOR implementado na primeira parte do trabalho.
- Um procedimento para imprimir os resultados em arquivos de saída para fazer os gráficos das soluções usando um pacote gráfico.

3.2 Validação do modelo com solução conhecida

Considere a equação de Poisson definida no interior do retângulo $[0,4]\times[0,2]$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = f(x,y) \quad \text{em} \;\; \Omega \tag{2}$$

satisfazendo as condições de contorno

$$\begin{array}{lcll} V & = & 0 & \quad x=0,\ x=4,\ y=2 \\ V & = & 200x(x-4) & \quad y=0 \end{array}$$

onde $f(x,y) = 100(y-2)^2 + 100x(x-4)$. Nesse exemplo a solução exata é conhecida, $V(x,y) = 50x(x-4)(y-2)^2$, considerando um problema com solução manufaturada. Defina a solução exata na implementação para comparação com a solução aproximada por diferenças finitas. Utilize $w = 1.96$, tolerância ($etol = 10^{-6}$) e um número máximo de iterações adequado. Verifique quantas iterações o método de Gauss-Seidel converge e escreva no relatório.

Nos testes computacionais faça um estudo da exatidão da solução calculando a norma, $erro = max|u_i^{exato} - u_i|$ para $i = 1, 2, \cdot, N_x * N_y$, para diferentes malhas: 16×8, 32×16 e 64×32. Calcule também o campo elétrico. Escolha uma das malhas e mostre os gráficos do pontencial e campo elétrico aproximados.

3.3 Capacitor de placas paralelas

O cálculo do potencial elétrico V e do campo elétrico $\vec{E}$ satisfazem, respectivamente, as equações:

$$
\begin{aligned}
\nabla.\epsilon\nabla V &= -\rho \qquad (3)\\
\vec{E} &= -\nabla V \qquad (4)
\end{aligned}
$$

onde ρ a densidade de carga e ϵ a permissividade elétrica. Se considerarmos que a permissividade constante, o potencial elétrico V satisfaz a seguinte equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\rho/\epsilon \qquad (5)$$

Desejamos obter o potencial elétrico $V(x, y)$ no interior de um domínio retangular de dimensões $[a, b] \times [c, d]$ pelo método das diferenças finitas centrais.

Um problema interessante é a simulação de um capacitor de placas paralelas. Para isso considere que o domínio $[0, 10] \times [0, 5]$ é livre de cargas $(\rho = 0)$ e com as seguintes condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
V &= 0.0 \quad \text{na fronteira do retângulo}\\
V &= +1 \quad y = 3,\ \ 2.5 \leq x \leq 7.5\\
V &= -1 \quad y = 2,\ \ 2.5 \leq x \leq 7.5
\end{aligned}
$$

Nos testes computacionais, considere $h_x = h_y = 0.125$, $w = 1.96$, tolerância $(etol = 10^{-6})$ e um número máximo de iterações adequado. Mostre gráficos do potencial e do campo elétrico para as soluções aproximadas obtidas.